

PRIMITIVES calculs

1 Notion de primitive

Soit f définie sur l'intervalle I , on dit que F est une primitive de f sur I si :

F dérivable sur I

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

* Soit F une primitive de f . L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est l'ensemble des fonctions G et g telle que $G = F + C$ ($C \in \mathbb{R}$)

* Soit $x_0 \in I$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive de f tel que $G(x_0) = y_0$.

* Toute fonction continue sur un IT y admet des primitives et toute fonction monotone sur un IT y admet aussi des primitives.

2 Recherche directe de primitives

	a pour primitive	+ k
$\lambda f'$	λf	
$f' + g'$	$f + g$	
$f'g + fg'$	$f \cdot g$	
$f'g - fg'$	$\frac{f \cdot g}{g^2}$	
$x f' f^{n-1}$	$\frac{f^n}{n}$	
$f' e^b$	$e^b f$	
f' / f	$\ln f $	
$f' (g \circ f)$	$f \circ g$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	
$1/x$	$\ln x $	
e^x	e^x	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\text{Arc sin } x = -\text{Arc cos } x$	
$1/\sqrt{1+x^2}$	$\text{Arc tan } x$	

$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$1/\operatorname{ch}^2 x = 1/\cosh^2 x$	$\operatorname{th} x$
$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$
$1/1-x^2$	$\operatorname{Arg} \operatorname{th} x$

+ k

Exercices :

$$\int 2x^5 - \frac{x^3}{2} - x^2 + 7 = \frac{1}{3}x^6 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + 7x + k$$

$$\int 1/x - 1/x^2 + 1/x^3 = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k$$

$$\int \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\begin{aligned} \int (x-1)^2 (x+1) &= \int (x^2 + 1 - 2x)(x+1) \\ &= \int x^3 + x^2 + x + 1 - 2x^2 - 2x \\ &= \int x^3 - x^2 - x + 1 \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

3: Cas de fonctions continues

Soit f continue sur $[a, b]$. Elle y admet des primitives.

Soit $x_0 \in [a, b]$, on note: $\int_{x_0}^x f(t) dt$,

La primitive de f qui s'annule en x_0

Soit G une primitive quelconque de f ,

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = G(x) - G(x_0) = [G(t)]_{x_0}^x \\ F'(x) = f(x) \quad F(x_0) = 0 \end{cases}$$

$F'(x) = f(x)$ est valable pour $x \in]a, b[$.

F est dérivable à droite de a de dérivée à droite $f(a)$

F " " " gauche de b " " " gauche $f(b)$

* Si F continue sur $\mathbb{R}$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l \quad \left(F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \right) \text{ alors } l = \int_{x_0}^{+\infty} f(t) dt$$

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$\text{de la même façon on définit: } \int_{-\infty}^{x_0} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$* \int_a^b f(t) dt = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a)$$

4 Formule d'intégration par parties

Soyent f et g , 2 fct continues et dérivables sur un it contenant $[a, b]$, f' et g' étant continues sur $[a, b]$.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$\int_a^x (f'g + fg')(t) dt$ est la primitive de $(fg' + f'g)$ qui s'annule en a

fg est une primitive de $(fg)'$

(les 2 fct sont continues sur $[a, b]$)

$$\text{donc } \int_a^x (f'g + fg')(t) dt = (fg)(x) + k$$

$$\text{en } x = a: 0 = (fg)(a) + k \Rightarrow k = -(fg)(a)$$

$$\text{donc } \int_a^x (f'g + fg')(t) dt = fg(x) - fg(a) = [fg(t)]_a^x$$

$$\int_a^x f'(t) g(t) dt + \int_a^x f(t) g'(t) dt = [fg(t)]_a^x$$

$$\int_a^x f'(t) g(t) dt = [fg(t)]_a^x - \int_a^x f(t) g'(t) dt$$

intéret: si on ne sait pas trouver une primitive de $f'g$, mais si on peut déterminer une primitive de fg'

$$\text{ex: } \int_1^x (\ln t) dt$$

donc solution:

$$\begin{cases} f'(t) = \ln t \\ g(t) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = \ln t \end{cases}$$

on n'arrive pas à trouver f

$$\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_1^x (\ln t) dt &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln x - [t]_1^x \\ &= x \ln x - x + 1\end{aligned}$$

La primitive de $\ln x$ est $(x \ln x - x + k)$.

$$\int_0^1 t^2 e^t dt =$$

solution $\rightarrow$

$$\begin{aligned}\begin{cases} f'(t) = t^2 \\ g(t) = e^t \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = 2t \end{cases} \\ \begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = t^2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = 2t \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 e^t dt &= [t^2 e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t \times (2t) dt \\ &= e - 2 \int_0^1 t e^t dt\end{aligned}$$

on réintègre par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t e^t dt &= [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ \begin{cases} f'(t) = e^t \\ g = t \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} f = e^t \\ g' = 1 \end{cases} \\ &= e - [e^t]_0^1 = e - e + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{en remplaçant : } \int_0^1 t^2 e^t dt &= e - 2(e - e + 1) \\ &= e - 2e + 2e + 2 \\ &= e - 2\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} t \sin t dt$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} f'(t) = \sin t \\ g(t) = t \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} f(t) = -\cos t \\ g'(t) = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t \sin t dt &= [-\cos t(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos t dt \\ &= [-t \cos t]_0^{\pi/2} - [-\sin t]_0^{\pi/2}\end{aligned}$$

$$= 1$$

$$* \int_1^2 (\ln^2 t)^2 dt = \int_1^2 \ln^4 t dt$$

$$\begin{cases} f'(t) = \ln t \\ g(t) = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(t) = 2 \\ g(t) = \ln t \end{cases} \quad \begin{cases} f(t) = 2t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = \ln t \end{cases} \quad \begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln^2 t dt &= \left[t (\ln t)^2 \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \ln t dt \\ &= \left[t (\ln t)^2 \right]_1^2 - 2 \left[t \ln t - t \right]_1^2 \\ &= \left[t (\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t \right]_1^2 \\ &= 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\ln^2 t)^2 dt &= \int_1^2 \ln^4 t dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \ln^3 t - \frac{1}{2} t^2 \ln^2 t + \frac{1}{2} t \ln t - \frac{1}{6} t \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} \ln^3 2 - \frac{2}{3} \ln^2 2 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

5: Formule de changement de variable

$$I = [\alpha, \beta] \quad J = [a, b]$$

soit f une fct continue sur J

soit φ " " " et dérivable sur I contenant I , et telle que φ' soit continue sur I et que $\varphi(I) \subset J$.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & J \subset \mathbb{R} \\ & \searrow \varphi' & \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

* la fonction $\varphi' \times (f \circ \varphi)$ est une fct continue sur I , donc admet des primitives sur I .

$$\text{Soit } x \in I, \text{ alors } G_1(x) = \int_{\alpha}^x \varphi'(t) \cdot (f \circ \varphi)(t) dt.$$

G_1 est la primitive de $\varphi' \times (f \circ \varphi)$ qui s'annule en α .

$$\begin{cases} [G_1(x)]' = \varphi'(x) \times (f \circ \varphi)(x) \\ G_1(\alpha) = 0 \end{cases}$$

* la fonction f est continue sur J donc f admet des primitives.

$$\varphi(\alpha) \in J$$

$$x \in I \Rightarrow \varphi(x) \in J \quad \text{soit } G_2(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(t) dt$$

Soit F une primitive de f .

$$G_2(x) = \left[F(t) \right]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} = F(\varphi(x)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\text{donc } \begin{cases} G_2(\alpha) = 0 \\ [G_2(x)]' = \varphi'(x) \times F'(\varphi(x)) = \varphi'(x) \times f(\varphi(x)) \end{cases}$$

* donc $G_1(x) = G_2(x)$ pour tout $x \in I$

d'où la formule

$$\int_a^x \varphi'(t) \times (f \circ \varphi)(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(u) du \quad \text{avec } u = \varphi(t)$$

pratiquement,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(u) du = \int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$u = \varphi(t)$$

$$u = \varphi(a) \Rightarrow t = a$$

$$u = \varphi(x) \Rightarrow t = x$$

$$du = \varphi'(t) dt$$

Ex. $\int_0^{\pi/4} \sin t (\cos t)^{-3} dt$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \cos t = u \\ \varphi'(t) = -\sin t \\ \varphi(a) = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/4} -\varphi'(t) \times f(\varphi(t)) dt = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/4)} f(u) du$$

$$= - \int_1^{\sqrt{2}/2} u^{-3} du = - \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2u^2} \right]_1^{\sqrt{2}/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

* $\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$

$$u = \sin t$$

$$\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

$$u=0 \rightsquigarrow t=0$$

$$u=1 \rightsquigarrow t=\pi/2$$

$$\sin: [0; \pi/2] \rightarrow [0, 1]$$

$$du \rightsquigarrow \cos t dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_0^{\pi/2} \cos t \times \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

* Soit f une fct paire.

$$\int_0^a f(u) du = \int_0^a f(-u) du$$

$$\begin{cases} -u = t \\ u = -t \\ u=0 \rightarrow t=0 \\ u=a \rightarrow t=-a \\ f(u) \rightarrow f(t) \\ du \rightarrow -dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a f(-u) du &= \int_0^{-a} f(t) \cdot (-dt) \\ &= - \int_0^{-a} f(t) dt \\ &= \int_{-a}^0 f(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_0^a f(u) du = \int_{-a}^0 f(u) du$$

* Soit f une fonction impaire

$$\begin{aligned} \int_0^a f(u) du &= \int_0^{-a} f(-t) \cdot (-dt) \\ &= \int_0^{-a} f(t) dt \\ &= - \int_{-a}^0 f(u) du \end{aligned}$$

* Soit f une fonction périodique de période T

$$\int_a^0 f(u) du = \int_a^0 f(u+T) du$$

$$\begin{cases} t = u+T \\ u=a \rightarrow t=a+T \\ u=0 \rightarrow t=T \\ du = dt \end{cases}$$

$$\int_a^0 f(u) du = \int_{a+T}^T f(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(u) du &= \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T} \\ &= \int_0^T f(u) du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{exercice: } \int (2x-3)^2 + \frac{1}{(2x-3)^2} &= \int \frac{1}{2} \times 2 (2x-3)^2 + \frac{1}{2} \times 2 (2x-3)^{-2} \\ &= \int \frac{(2x-3)^2}{2} + \frac{(2x-3)^{-2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^{-1}}{-1} \\ &= \frac{(2x-3)^3}{6} - \frac{1}{2(2x-3)} + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{2x^2+x-3} &= \int \frac{(4x+1)(2x^2+x-3)^{-1}}{(2x^2+x-3)^0} \\ &= \ln |2x^2+x-3| + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2-4x+7)^2 (x-2) &= \int \frac{1}{2} \times (2x-4) (x^2-4x+7)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2-4x+7)^3}{3} = \frac{1}{6} (x^2-4x+7)^3 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)}{(\sqrt{x^2-2x+5})^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{1}{2} (2x-2) (x^2-2x+5)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \sqrt{x^2-2x+5} + k = \sqrt{x^2-2x+5} + k \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} = \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \ln |\ln x| + k$$

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x} = -\ln |2+\cos x| + k$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} = \ln |\cosh x| + k$$

$$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + k$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = -\ln |\sin x + \cos x| + k$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin x \cdot \cos^{-3}}{\cos^3} = \int \frac{-\cos^{-2} x}{-2} = \frac{1}{2 \cos^2 x} + k$$

$$\int \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \int \frac{(\ln x) \times 1 - \frac{1}{x} \times x}{(\ln x)^2} = \frac{x}{\ln x}$$

$$\int \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} = \int \frac{1 \times \cos x - (x \times 1 - \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}$$

inté. par parties:

$$\pm = \int_0^{\pi} e^t \cdot \sin t \, dt \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = \cos t \end{cases}$$

$$= \left[e^t \sin t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \cos t \, dt$$

INTEGRATION

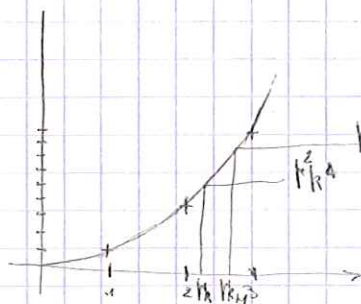
1: Définition

① exemple

un mobile se déplace devant une droite à une vitesse $v(t) = t^2$ (est le temps)

Quelle est l'abscisse du mobile au temps $t=3$ sachant qu'en $t=0$ il était à l'origine.

$$0 \leq v(t) \leq 9 \rightarrow 0 \leq x \leq 27$$



$$0 \leq t \leq 1$$

$$1 \leq t \leq 2$$

$$2 \leq t \leq 3$$

$$0 \leq v(t) \leq 1$$

$$1 \leq v(t) \leq 4$$

$$4 \leq v(t) \leq 9$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$1 \leq x_2 \leq 4$$

$$4 \leq x_3 \leq 9$$

$$5 \leq x \leq 14$$

divisons l'intervalle $[0, 3]$ en n intervalles égaux.

$$t_0 = 0; t_1 = \frac{3}{n}; t_2 = \frac{6}{n} \dots t_k = \frac{k \times 3}{n}; t_{k+1} = \frac{(k+1) \times 3}{n} \dots t_n = 3$$

$$\text{sur } [t_k; t_{k+1}]$$

$$\left(\frac{3k}{n}\right)^2 \leq v(t) \leq \left(\frac{3(k+1)}{n}\right)^2$$

$$\left(\frac{3k}{n}\right)^2 \times \frac{3}{n} \leq x_k \leq \left(\frac{3(k+1)}{n}\right)^2 \times \frac{3}{n}$$

$$\text{alors: } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{dans notre cas: } \sum_{k=0}^n \frac{27}{n^3} \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \leq x \leq \frac{27}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{9}{2} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \leq x \leq \frac{9}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$n = 100$$

$$n = 1000$$

$$8,865 \leq x \leq 9,135$$

$$8,986 \leq x \leq 9,014$$

2: Définition générale

Soit f définie et bornée sur $[a, b]$

Il existe 2 réels m et M tq $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$

* on appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ toute suite de réels $x_0, x_1, \dots, x_n$

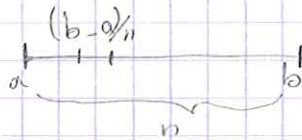
$$I_q = \begin{cases} x_0 = a & x_n = b \\ x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \end{cases}$$



* on appelle pas ou module de la subdivision le plus grand des réels $x_1 - x_0, \dots$

* cas de subdivisions en points équidistants pour avoir n IT.

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2 \frac{b-a}{n}$$



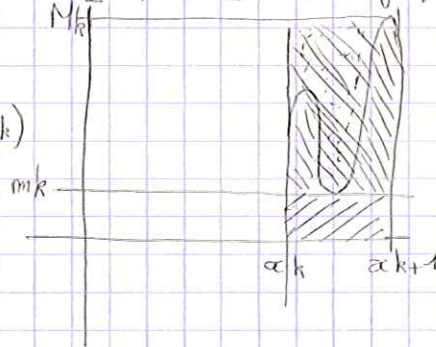
$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \dots x_n = b$$

a) Première interprétation.

Soit une subdivision de $[a, b]$ en $[x_k, x_{k+1}]$ la fonction f est bornée

$$\exists (m_k, M_k) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall x \in [x_k, x_{k+1}] \quad m_k \leq f(x) \leq M_k$$

$$\text{Soit } s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$$



$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

Soit Σ_s l'ens. de toutes les ~~fonctions~~ sommes de la forme s

Soit Σ_i l'ens. de toutes les sommes de la forme s .

Definition: f est intégrable si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une somme s appartenant à Σ_s et une somme s appartenant à Σ_i tq:

$$S - s < \varepsilon$$

Il existe alors un unique réel I tq $\forall s \in \Sigma_i, \forall S \in \Sigma_s$

$$s \leq I \leq S$$

Le réel I est appelé intégrale de f sur $[a, b]$

b) deuxième interprétation.



$$c_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad m_k \leq f(c_k) \leq M_k$$

$$m_k (x_{k+1} - x_k) \leq \underbrace{f(c_k)}_{M_k(x_{k+1} - x_k)} (x_{k+1} - x_k) \leq M_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$s \leq \sigma \leq S$$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) (x_{k+1} - x_k)$$

F est appelée somme de Riemann attachée à la subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$

Théo:

Soit f bornée sur $[a, b]$, f est intégrable sur $[a, b]$ et d'intégrale égale à I sur, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision de module S tq $S < \alpha$ et pour toute somme de Riemann σ attachée à une telle subdivision, on ait: $|\sigma - I| < \varepsilon$

En résumé, quand le module de la subdivision tend vers 0, la somme de Riemann tend vers l'intégrale de la fonction sur $[a, b]$

Subdivision en points équidistants:

$$x_0 = a; x_1 = a + \frac{b-a}{n} \dots x_n = b$$

si f intégrable sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$C_k \in [x_k; x_{k+1}]$$

$$\begin{aligned} * C_k = x_k \quad \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right] = \int_a^b f(x) dx$$

$$* C_k = x_{k+1} \quad \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right) (x_{k+1} - x_k)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \left[f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f(b) \right] = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^a \frac{x dx}{x^2 - a^2}$$

$$t = x^2$$

$$x = a \rightarrow t = a^2$$

$$x = 0 \rightarrow t = 0$$

$$x = \sqrt{t}$$

$$x^2 = t$$

$$dx = (\sqrt{t})' dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$= \int_0^{a^2} \frac{\sqrt{t}}{t-a^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$= \int_0^{a^2} \frac{1}{2(t-a^2)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \frac{1}{(t-a^2)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln |t-a^2| \right]_0^{a^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a^2 - a^2}{a^2} \right|$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad x = a \sinh t \quad \text{avec } a > 0$$

$$dx = (a \sinh t)' dt$$

$$dx = a \cosh t dt$$

$$x=0 \rightarrow t=0$$

$$x=a \rightarrow \sinh t = 1 \Rightarrow t = \text{Argsh } 1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$[\text{Argsh } t = \ln(t + \sqrt{t^2+1})]$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2 \sinh^2 t} = \sqrt{a^2(1+\sinh^2 t)} = \sqrt{a^2 \cosh^2 t} = a \cosh t$$

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{a \cosh t}{a \cosh t} dt = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 1 dt = \left[t \right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\int_{\alpha}^x \frac{dr}{r + \sqrt{r^2}}$$

$$\alpha > 0$$

$$x > 0$$

$$u = \sqrt{r^2}$$

$$dr = (u^2)' du = 2u du$$

$$r = \alpha \rightarrow u = \sqrt{\alpha^2}$$

$$r = x \rightarrow u = \sqrt{x^2}$$

$$\frac{dr}{r + \sqrt{r^2}} = \frac{2u du}{u^2 + u}$$

$$\sqrt{r^2} \equiv u$$

$$r = u^2$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\sqrt{\alpha^2}}^{\sqrt{x^2}} \frac{2u du}{u^2 + u} \\ &= \int_{\sqrt{\alpha^2}}^{\sqrt{x^2}} \frac{2}{u+1} du \\ &= 2 \left[\ln|u+1| \right]_{\sqrt{\alpha^2}}^{\sqrt{x^2}} \\ &= 2 (\ln(\sqrt{x^2}+1) - \ln(\sqrt{\alpha^2}+1)) \\ &= 2 \ln \left[\frac{\sqrt{x^2}+1}{\sqrt{\alpha^2}+1} \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}$$

$$x = \sinh t$$

$$dx =$$

$$x=0 \rightarrow t=0$$

$$x=1 \rightarrow \sinh t = 1 \Rightarrow t = \text{Argsh } 1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\sqrt{x^2+1} \rightarrow \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t$$

$$dx = (\sinh t)' dt = \cosh t dt$$

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\sinh t \cosh t} \cosh t dt = \int_0^{\text{Argsh } 1} \frac{1}{\sinh t} dt = \left[\ln|\cosh t| \right]_0^{\text{Argsh } 1} = \ln(\cosh(\text{Argsh } 1)) - \ln(\cosh(0))$$

$$\cosh(\text{Argsh } x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$= \ln(\sqrt{1+1}) - \ln(1) = \ln(\sqrt{2})$$