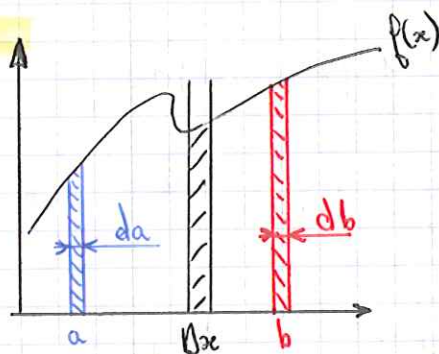


INTEGRATIONS

4: Intégrales simples

11: quelques principes



intégrale selon RIEMANN:

$$I(a,b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\frac{(b-a)}{\Delta x}-1} f(a+n\Delta x) \Delta x$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = -f(a)$$

qd $a \rightarrow a+da$

alors $I(a,b) \rightarrow I(a,b) - f(a)da$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = f(b)$$

$I(a+da, b)$

intégrations par parties: si u et v sont fonctions de x :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$\Rightarrow uv - \int v du = \int u dv$$

séries de Taylor:

$$f(x') = f(x) + (x'-x) \frac{df}{dx}(x) + \frac{(x'-x)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x) + \dots + \text{ordre } n$$

démonstration: $f(x_1) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{dx} dx$

$$= \left[x \frac{df}{dx} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} x \frac{d^2f}{dx^2} dx \quad \text{etc} \dots$$

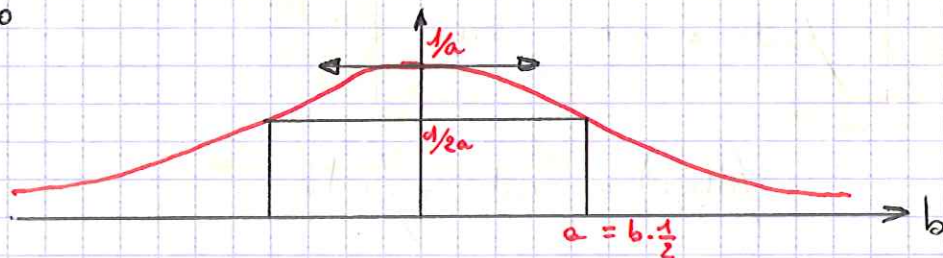
12: Applications

$$\begin{aligned} * \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

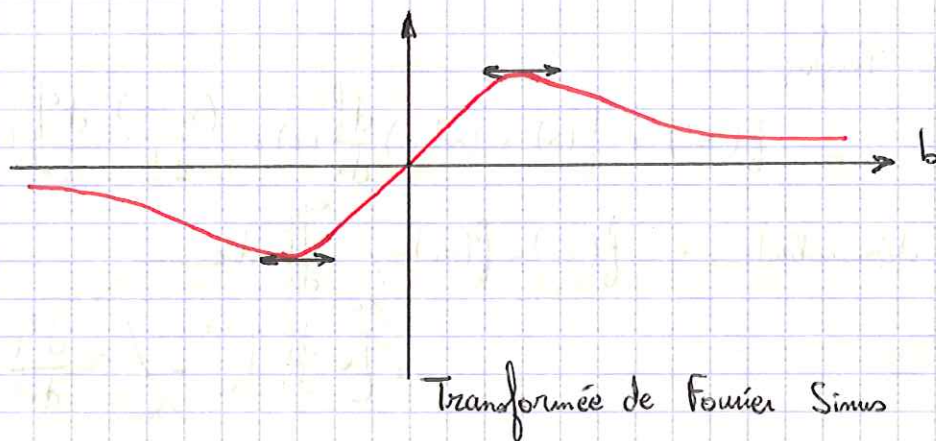
$$\begin{aligned} * \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-ax + jbx} \, dx \\ &= \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{(jb-a)x} \, dx \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(jb-a)x}}{jb-a} \right]_0^{\infty} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{a-jb} = \frac{\operatorname{Re}(a+jb)}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} = F(b) \end{aligned}$$

$$* \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

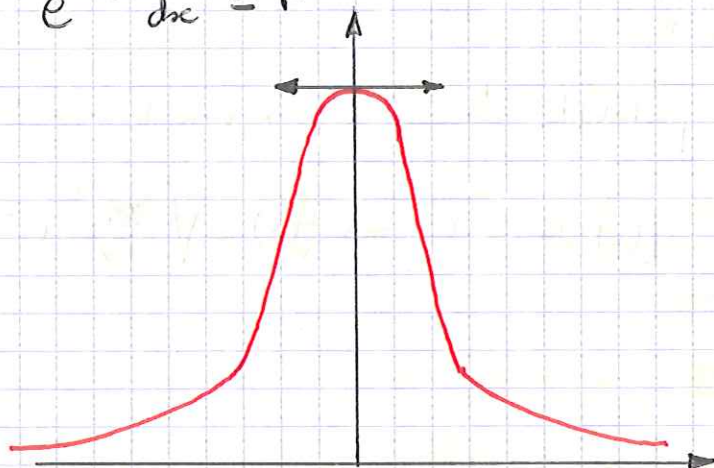


Fonction de Lorentz : Transformée de Fourier cosinus.



Transformée de Fourier Sinus

$$* \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = F$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

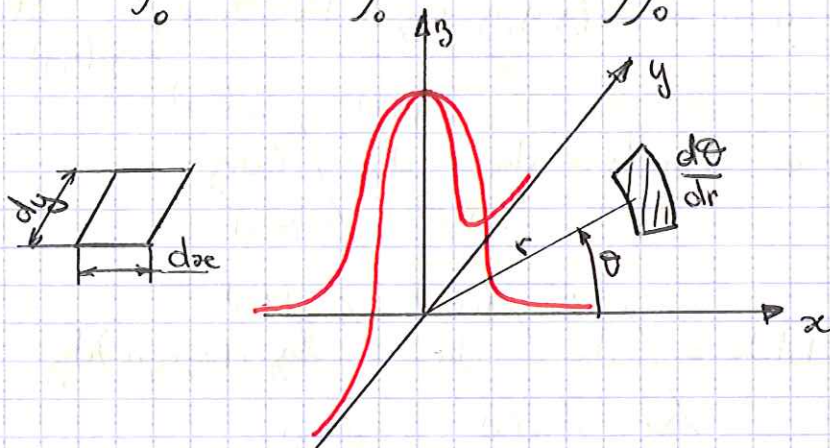
$$e^{-ax^2} = \frac{1}{2} - ax^2 = \ln \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{a} \ln 2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$$

$$F' = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-ay^2} dy}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-ay^2} dy = \iint_0^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy$$



il faut alors passer en coordonnées polaires :

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} x^2 + y^2 = r^2$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

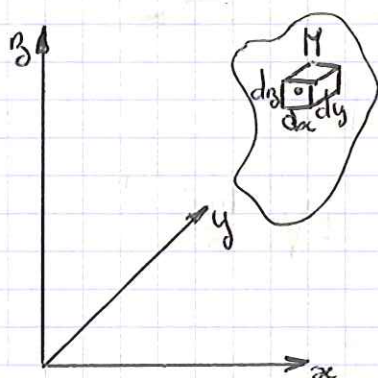
$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} \frac{dr^2}{2} = \frac{\pi}{4} \left[-\frac{e^{-ar^2}}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4a}$$

donc $F = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{F'}$

$p(x) \sim e^{-ax^2}$ = probabilité d'avoir x / x varie de $-\infty$ à $+\infty$

si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}$

2: Intégrales multiples



en $M(x, y, z)$,

masse volumique $\rho(x, y, z)$

dV = élément de volume

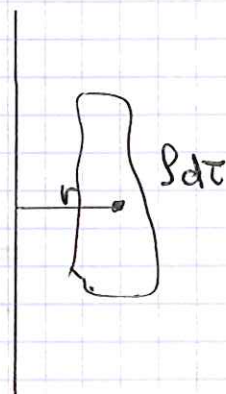
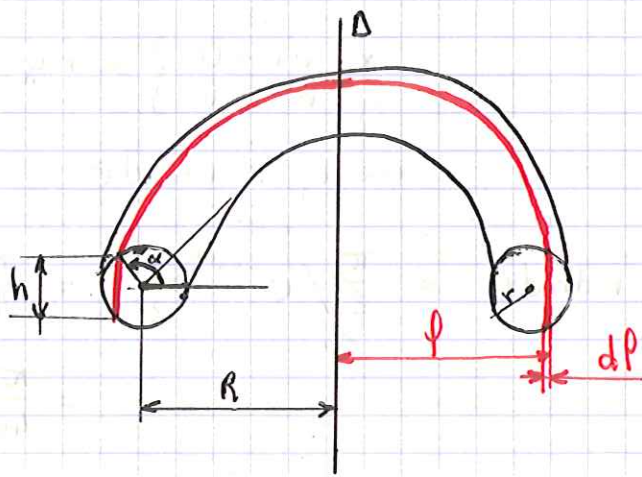
Masses totale du système: $\iiint_{Vol} \rho(x, y, z) dx dy dz$ ou $\iiint \rho dV$

Masses d'une colonne $(x, y, z, dx, dy) = dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \rho(x, y, z) dz$

Masses d'une tranche: $dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \rho dz$

M totale = $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \rho(x, y, z) dz$

ex:



$$I_{\Delta} = \iiint r^2 dM = \iiint \rho r^2 d\tau$$

$$\rho \text{ constante} : \iiint r^2 d\tau$$

$$\int \rho^2 S(\rho) d\rho = \int \rho^2 2\pi \rho h(\rho) d\rho$$

$$\text{avec } h = 2\sqrt{r^2 + (\rho - R)^2} = 2r \sin \alpha$$

$$\rho = R - r \cos \alpha$$

$$d\rho = r \sin \alpha d\alpha$$

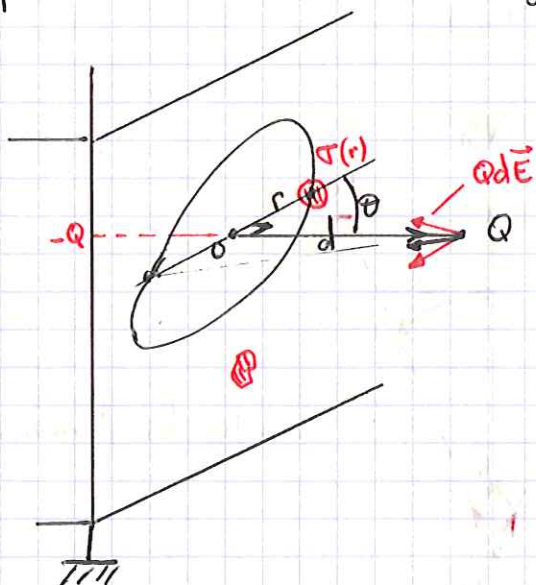
$$I_{\Delta} = 2\pi \rho \int_0^{\pi} (R^3 - r^3 \cos^3 \alpha - 3R^2 r \cos \alpha + 3Rr^2 \cos^2 \alpha) 2r^2 \sin^2 \alpha d\alpha$$

$$= 4\pi r^2 \rho \left[R^3 \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha - r^3 \int_0^{\pi} \cos^3 \alpha \sin \alpha d\alpha - 3R^2 r \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha + 3Rr^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha d\alpha \right]$$

$$= 4\pi r^2 \rho \left[\frac{\pi R^3}{2} + \frac{3}{8} \pi Rr^2 \right]$$

$$= M \left[R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right]$$

esc : plan électrisé $\Rightarrow$ densité de charges électriques



P'écant à la neutralité (charge) existe obligatoirement à la surface.

$$V(r) = -V_0 \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

- Calcul de la charge totale du plan - Q :

$$- Q = \iint \sigma ds$$

$\sigma(r) \rightarrow \sigma$ constant sur un cercle de rayon r



$$= \int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r dr = -\sigma_0 d \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad \text{avec } u = r^2 + d^2$$

$$r dr = \frac{du}{2}$$

$$\Leftrightarrow -Q = -2\pi \sigma_0 d \int_0^{\infty} x^{-3/2} \frac{dx}{2} = -2\pi \sigma_0 d \left[-x^{-1/2} \right]_0^{\infty}$$

$$= -2\pi \sigma_0$$

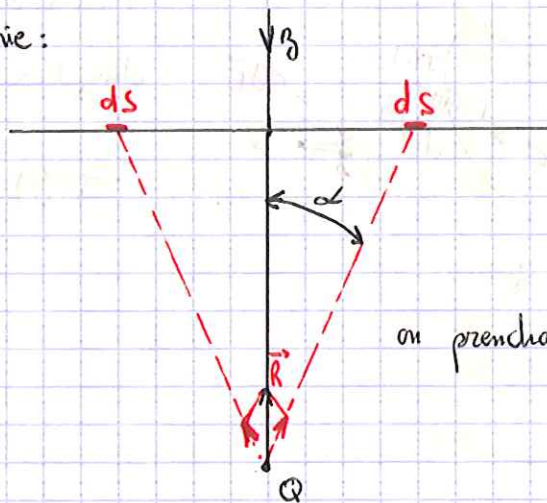
- Force exercée sur Q ponctuelle à d au dessus de O

$$F_{\text{en } q'} = \frac{qq'}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad \vec{r} \text{ de } q \text{ vers } q'$$

$$= Q \iint d\vec{E} \quad d\vec{E} = \text{force exercée sur } Q \text{ par 1 élément du plan}$$

$$Q d\vec{E} = \frac{Q \sigma(r) dS}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}}$$

par symétrie:



on prendra les éléments vectoriels $\vec{R}$

on fera donc la somme des éléments sur le plan.

$$= Q \int_{\text{plan}} dE_z$$

$$F = \int_{\text{plan}} Q \frac{\nabla(r) \cos \alpha}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + d^2)} r dr d\theta = \frac{2\pi Q}{4\pi \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\nabla(r) \cos \alpha}{(r^2 + d^2)} r dr$$

$$\text{avec } 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi$$

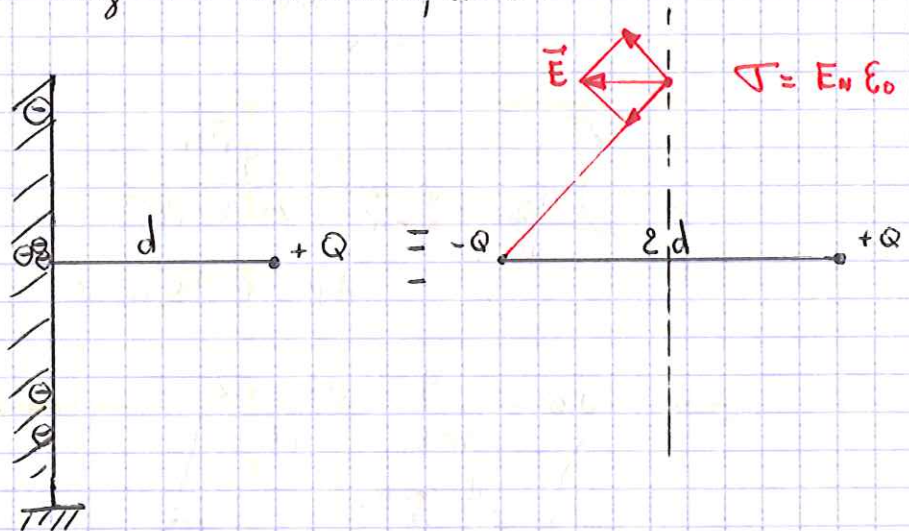
$$= - \frac{Q \sigma_0}{2 \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{d^2 r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2 + 1/2}} \quad \text{avec } \cos \alpha = \frac{d}{(r^2 + d^2)^{1/2}}$$

$$= - \frac{Q \sigma_0}{2 \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^3}$$

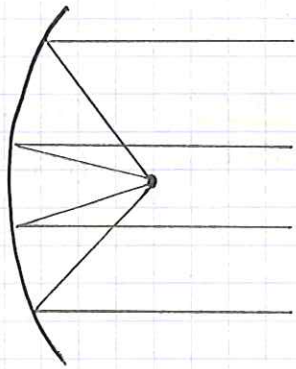
$$= - \frac{Q \sigma_0}{2 \epsilon_0} \left(\frac{-1/2}{2(r^2 + d^2)^2} \right)_0^\infty = - \frac{Q \sigma_0 d^2}{8 \epsilon_0 d^4} = - \frac{Q \sigma_0}{16 \pi \epsilon_0 d^2}$$

$$= \frac{-Q^2}{16 \pi \epsilon_0 d^2} = \frac{-Q^2}{4 \pi \epsilon_0 (2d)^2}$$

intérêt physique : images électriques : lorsqu'on a une charge électrique et une surface au sol, tout se passe alors c'est si on avait la charge $-Q$ virtuellement, donc :



autre application :



onde plane engendrée
par foyer principal

==

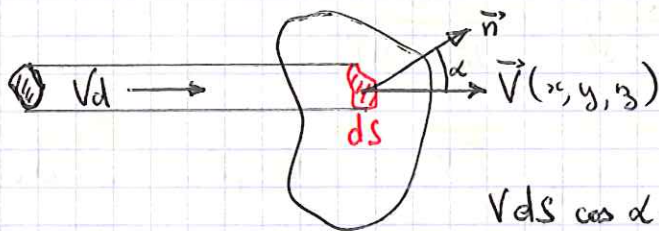


onde plane engendrée
point par point.

ex :

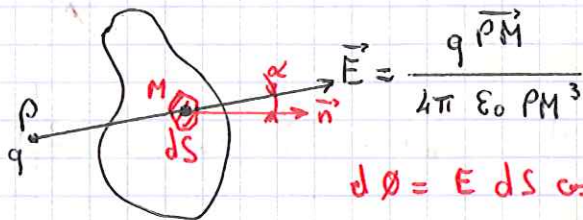
Flux

Débit d'un fluide à travers 1 surface lorsqu'on connaît $\vec{V}(x, y, z)$



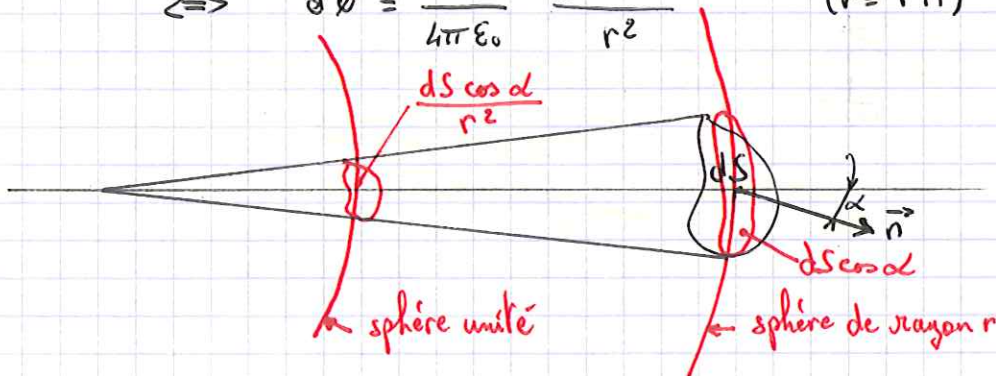
$$V ds \cos \alpha = \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

$$\phi_s = \iint_s \vec{V} \cdot d\vec{S}$$



$$d\phi = E ds \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds \cos \alpha}{r^2} \quad (r = PM)$$



$\frac{1}{2}$ espace $\rightarrow \Omega = 2\pi$

angle solide

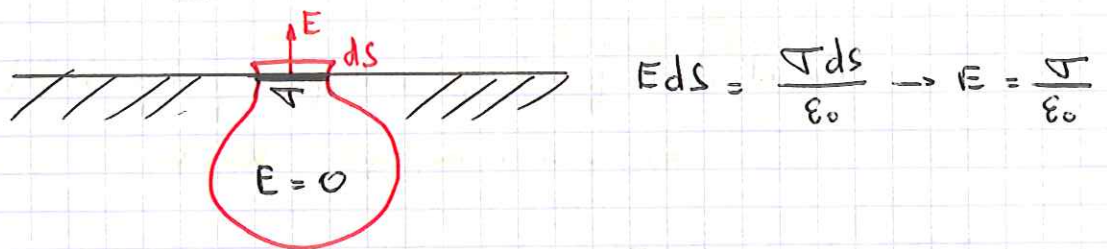
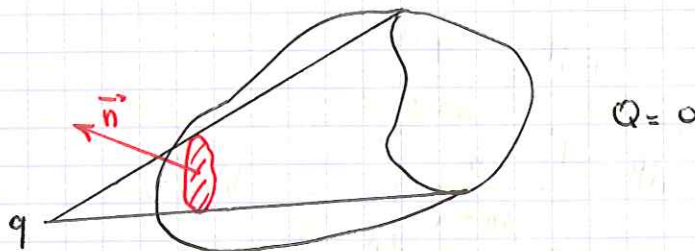
$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Théorème de GAUSS : en surface fermée :

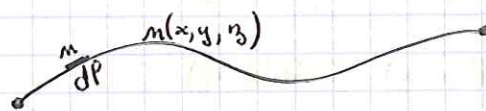
$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{espace}} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi$$

donc $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ pour une charge intérieure à une surface fermée

charge à l'extérieur :

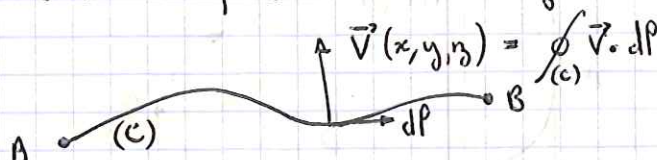


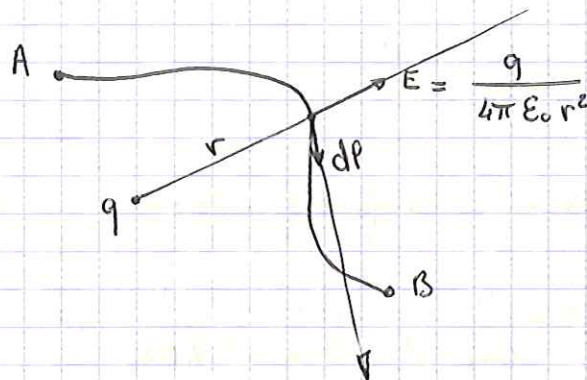
3: Intégrales curvilignes



$$\int_{AB} n dP = \oint n dP$$

Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une trajectoire





circulation de E charge électrique d'un champ :

$$E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

$$d\vec{P} = \frac{dr}{r d\theta} \cdot \vec{E} = \frac{dr}{r d\theta} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E dP = \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\int_{AB} E dP = \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_A^B = V_A - V_B$$

Travail de la force de A en B (ne dépend pas de la trajectoire)

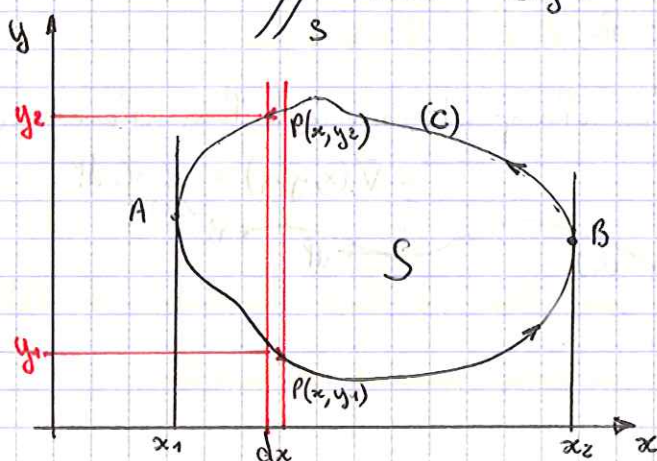
$\Rightarrow$ si on a un cycle : $W = 0$

Relation de STOKES:

soit $\oint_C P dx + Q dy$
C fermée du plan xoy

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

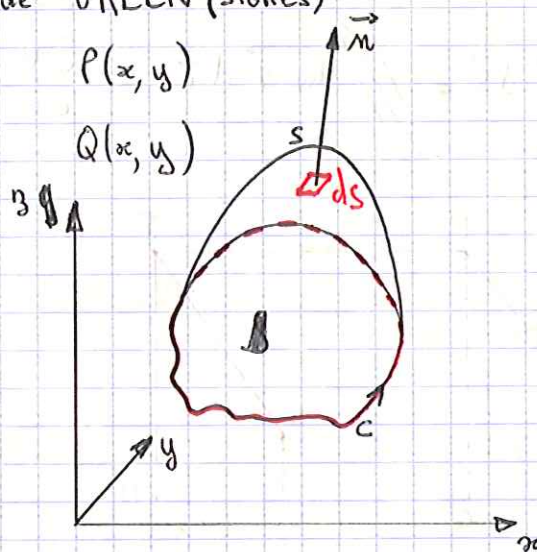


$$\int_A^B [P(x, y_1) - P(x, y_2)] dx$$

$$P(x, y_2) = P(x, y_1) + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\begin{aligned} \int_{(c)} Q dy &= \int_{(\frac{c}{2})} [Q(y, x_2) - Q(y, x_1)] dy \\ &= \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy \end{aligned}$$

Formule de GREEN (STOKES)



$$\vec{V}(x, y, z)$$

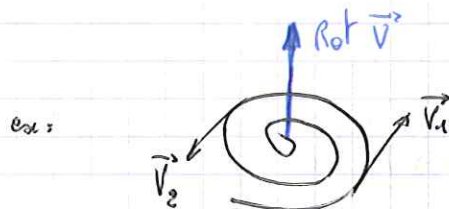
$$\oint_{c \text{ fermée}} P dx + Q dy$$

$$\oint_{c \text{ fermée}} \vec{V} \cdot d\vec{P} = \iint_s \text{Rot } \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

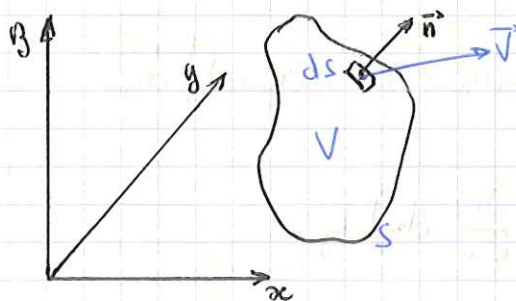
$$\text{Rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Si V représente une vitesse de fluide laminaire, le Rot est nul.

Le Rot est donc un vecteur mesurant les tourbillons.



Formule d'OSTOGRADSKI : (ou de la "divergence")

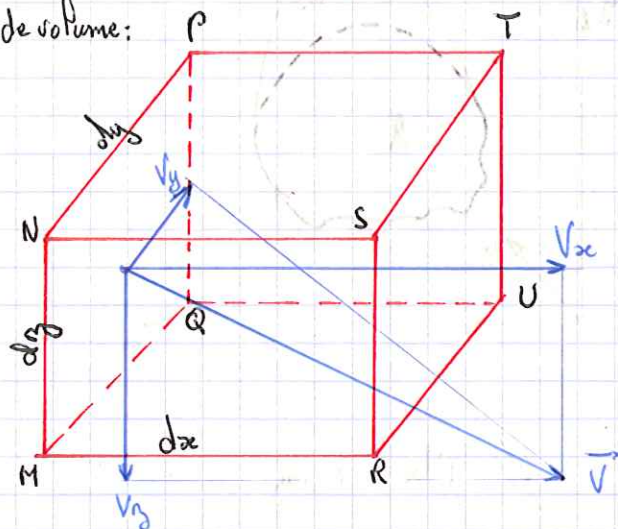


avec $d\tau$ = élément de volume

$$\text{et } \text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\oint_{S \text{ fermée}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint \text{div } \vec{V} d\tau = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Soit un élément de volume :



$$\begin{aligned} \text{Flux } \phi \text{ sortant} &= \phi \text{ sortant } BSTU - \phi \text{ entrant } MNPQ \\ &+ \phi \text{ sortant } QPTU - \phi \text{ entrant } MNSR \\ &+ \phi \text{ sortant } NPTS - \phi \text{ entrant } MRUQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= V_x(x+dx, y, z) dy dz - V_x(x, y, z) dy dz \\ &+ V_y(x, y+dy, z) dx dz - V_y(x, y, z) dx dz \\ &+ V_z(x, y, z+dz) dx dy - V_z(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial V_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial V_z}{\partial z} dx dy dz$$

La divergence mesure le flux qui sort à travers une surface fermée.

exemple:

théorème de Gauss:

$$\iint_{S \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \iiint_V \text{div } \vec{E} dx dy dz$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

exemple: champ d'induction " $\vec{B}$ " à flux conservatif

synonyme de $\text{div } \vec{B} = 0$

