

Exemples de calculs d'intégrales comportant des fonctions trigonométriques

1. Utilisation des formules de transformation

Rappels: une primitive de $\cos(ax+b)$ est $\frac{1}{a} \sin(ax+b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)
 $\sin(ax+b)$ " $-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$ "
 $1 + \lg^2(ax+b)$ " $\frac{1}{a} \lg(ax+b)$ "

Exemples: $\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \cdot \sin 2x \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [\cos(x-2x) - \cos(x+2x)] \, dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\cos x - \cos 3x] \, dx$
 $= \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_{\alpha}^{\beta}$
 $\int_{\alpha}^{\beta} \cos^2 x \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\alpha}^{\beta}$

Exercices 1 * Calculer $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos 4x \, dx$ $I_2 = \int_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x \, dx$
 $I_3 = \int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx$
 * Trouver une primitive de $\cos^2 x \sin^2 x$
 (on pourra calculer $F(x) = \int_0^x \cos^2 t \cdot \sin^2 t \, dt$).

2. Polynômes en cosinus et sinus avec des puissances impaires

Exemples $\int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$
 $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^3 x \, dx = \left[\frac{1}{4} \sin^4 x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$

On utilise les propriétés suivantes:
 une primitive de $\cos x \times \sin^n x$ est $\frac{1}{n+1} \sin^{n+1}(x)$ ($n \neq -1$)
 " " " $\sin x \times \cos^n x$ est $-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1}(x)$ ($n \neq -1$)

d'après les remarques: $(\cos x)' = -\sin x$; $(\sin x)' = \cos x$; une primitive de $u' \cdot u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$

Exemples $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \times \cos^2 x \times \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$
 $= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$
 $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\pi/3} \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \int_0^{\pi/3} \sin x \, dx - \int_0^{\pi/3} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$
 $= \left[-\cos x \right]_0^{\pi/3} + \left[\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$
 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \times \sin x \, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 x \cdot \sin x \, dx$
 $= \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_{\pi/3}^{\pi/2} + \left[\frac{1}{5} \cos^5 x \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = +\frac{1}{24} - \frac{1}{160} = \frac{17}{480}$

On transforme le puissance impaire la plus faible de la façon suivante
 $\sin^{2n+1} x = \sin^{2n} x \times \sin x = (\sin^2 x)^n \times \sin x = (1 - \cos^2 x)^n \times \sin x$ que l'on développe
 $\cos^{2n+1} x = \cos^{2n} x \times \cos x = (\cos^2 x)^n \times \cos x = (1 - \sin^2 x)^n \times \cos x$ " " "

Exercice 2 Calculer

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^5 x \, dx \quad I_5 = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$$

$$I_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx \quad I_7 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^5 x \, dx$$

3. Intégrales de Wallis - Formule de Wallis

Le but de ce paragraphe est de calculer

La méthode explicite ici peuvent s'appliquer au calcul de $\int \sin^n x \, dx$ et $\int \cos^n x \, dx$ avec ces deux résultats nous simplifions à écrire dans le cas général

Remarque : $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ effectuons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$

$x=0 \rightarrow t=\pi/2$
 $x=\pi/2 \rightarrow t=0$
 $dx \rightarrow -dt$
 $\cos x = \cos(\pi/2 - t) = \sin t$

Donc
$$J_n = \int_{\pi/2}^0 \sin^n t \cdot (-dt) = - \int_{\pi/2}^0 \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

$$I_n = J_n$$

Calculons I_{n+2} Pour cela effectuons une intégration par parties -

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \times \sin^{n+1} x \, dx$$

$\begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \sin^{n+1} x \end{cases} \quad \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ g'(x) = (n+1) \cos x \sin^n x \end{cases}$

$$I_{n+2} = \left[-\cos x \times \sin^{n+1} x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^2 x \cdot \sin^n x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (n+1) (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^n x \, dx = (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx$$

$\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx}_{I_n} \quad \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx}_{I_{n+2}}$

d'où $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$ ce qui donne
$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n \quad (1)$$

Application de cette formule

a) 1er cas I_n pour n pair

$n=0 \quad I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ $I_0 = \frac{\pi}{2}$

$n=2$ par application de (1) lorsque $n=0 \quad 2 I_2 = 1 \cdot I_0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$ $I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$

$n=4$ " " " (1) " $n=2 \quad 4 I_4 = 3 I_2 \Rightarrow I_4 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$ $I_4 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$

Exercice 3 calculer de même $I_6 \quad I_8$ Trouver la formule générale qui donne I_{2p} b) 2ème cas I_n pour n impair

$n=1 \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$ $I_1 = 1$

$n=3$ par application de (1) lorsque $n=1 \quad 3 I_3 = 2 I_1$

$n=5$ " " " " $n=3 \quad 5 I_5 = 4 I_3$

$I_3 = \frac{2}{3}$
 $I_5 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

Exercice 4 Calculer de même $I_7 \quad I_9$ Trouver la formule générale qui donne I_{2p+1}

$$I = \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \quad \text{nombre}$$

$$F(x) = \int_a^x t \, dt = \frac{1}{2} (x^2 - a^2) \quad \text{Fonction de } x$$

$$F(x, y) = \int_a^x t \, dt = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \quad \text{Fonction de } x \text{ et de } y$$

$$\int_0^2 \frac{dr}{r-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dr}{r-1} + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dr}{r-1} \right)$$

On obtient donc $I_{2p} = \frac{(2p-1)}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$ et $I = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3}$

Formule de Wallis: sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leq \sin^{n+2} x \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ donc $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$ d'après (1).

On obtient $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

en appliquant cette formule à $n = 2p$ on obtient $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$.

$$\text{Or } \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \frac{2p}{2p-1} \times \frac{2p-2}{2p-3} \times \dots \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p}{2p-1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-2}{2p-3} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{\pi}$$

On conclut donc que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p}{2p-1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-2}{2p-3} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{1}$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{2p \times (2p-2) \times \dots \times 2}{(2p-1) \times \dots \times 3} \right] \times \frac{1}{2p+1}$$

(formule dite de "Wallis").

4. Polynômes en cosinus et sinus avec des puissances paires.

Exemple calcul de $I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx$.

1^{ère} méthode: on se débrouille en utilisant les formules de transformation

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int_0^{\pi/4} (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2x \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4x}{2} \times \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{16} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{\pi/4} \left(1 - \cos 4x + \cos 2x - \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 2x]\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 6x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{16} \left[x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{16} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 0 - \frac{1}{12} \times (-1) \right] = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$$

2^{ème} méthode: plus systématique mais parfois plus longue

Principe: par intégration par parties successives se débarrasser du cosinus ou du sinus (celui qui a la puissance la plus faible)

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos^4 x \quad f'(x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x$$

$$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$$

$$I = \left[-\frac{1}{5} \sin x \cdot \cos^5 x \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} \cos^6 x \, dx = -\frac{1}{40} + \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} \cos^6 x \, dx$$

Pour le calcul de $\int_0^{\pi/4} \cos^6 x \, dx$ on soit même méthode que pour les intégrales de Wallis

soit utilisation de $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/4} \cos^6 x \, dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x)^3 \, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^3 \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} (1 + 3\cos 2x) \, dx + \frac{3}{8} \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \left[x + \frac{3}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} + \frac{3}{16} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3(2x) \right]_0^{\pi/4} \\
 &= \left[\frac{5}{16} x + \frac{3}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3(2x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{5\pi}{64} + \frac{3}{4} - \frac{1}{48} = \frac{5\pi}{64} + \frac{11}{48}
 \end{aligned}$$

donc $I = -\frac{1}{40} + \frac{1}{5} \left(\frac{5\pi}{64} + \frac{11}{48} \right) = -\frac{1}{40} + \frac{11}{240} + \frac{\pi}{64} = \frac{1}{48} + \frac{\pi}{64}$.

Exercice 5. Calculer $J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx$

5. Fonctions rationnelles en cosinus et sinus

Exemples. $I = \int_0^{\pi/3} \frac{2 \sin x}{\cos^2 x + 5 \sin^2 x} \, dx$

faire le changement de variable $t = \cos x$

$$\begin{aligned}
 x=0 & \quad t=1 \\
 x=\pi/3 & \quad t=1/2 \\
 \cos^2 x + 5 \sin^2 x &= \cos^2 x + 5(1 - \cos^2 x) = 5 - 4 \cos^2 x = 5 - 4t^2 \\
 dt &\rightarrow -\sin x \, dx
 \end{aligned}$$

donc $I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2t-\sqrt{5}} - \frac{1}{2t+\sqrt{5}} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\ln |2t-\sqrt{5}| - \ln |2t+\sqrt{5}| \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\ln \left| \frac{2t-\sqrt{5}}{2t+\sqrt{5}} \right| \right]_0^{1/2}$

On peut parfois utiliser les changements de variables $t = \cos x$ $t = \sin x$
 $t = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arc cos } t$ $dt = -\sin x \, dx$
 $t = \sin x \Leftrightarrow x = \text{Arc sin } t$ $dt = \cos x \, dx$

Exemple. $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} \, dx$ faire le changement de variable $t = \lg \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned}
 x=0 & \quad t=0 \\
 x=\pi/3 & \quad t=\frac{\sqrt{3}}{3} \\
 \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
 dt &= \frac{1}{2} \left(1 + \lg^2 \frac{x}{2} \right) dx \Leftrightarrow dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1+t^2}{1-t^2} \times \frac{2 \, dt}{2(1+t^2)} = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2}{1-t^2} \, dt = \int_0^{\sqrt{3}/3} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
 I &= \left[-\ln |1-t| + \ln |1+t| \right]_0^{\sqrt{3}/3} = \left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\sqrt{3}/3} \\
 I &= \ln \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

On peut donc utiliser le changement de variable $t = \lg \frac{x}{2} = \tan \frac{x}{2}$.
 donc $x = 2 \text{ Arctan } t$, $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Exercice 6. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ (changement $t = \lg \frac{x}{2}$).

Trouver une primitive de $\frac{1}{\sin x}$ (changement $t = \lg \frac{x}{2}$).

3. Propriétés de l'intégrale

* Si f est intégrable sur $[a, b]$, f est intégrable sur tout segment contenu dans $[a, b]$.
on pose $\int_a^a f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ et $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Si f est intégrable sur un segment contenant a, b, c on a -

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \text{Relation de Chosies.}$$

* Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, $f+g$ et λf sont intégrables sur $[a, b]$.

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

* Si f est positive et intégrable sur $[a, b]$ $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ avec $f \geq g$ on a

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

* Si f est positive et continue sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] f(x) = 0$$

* si f est intégrable sur $[a, b]$, $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Valeur moyenne, valeur efficace.

* on appelle valeur moyenne de la fonction sur $[a, b]$ la quantité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right]$$

- si $m \leq f(x) \leq M$ alors $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

- si de plus f est continue sur $[a, b]$.

$$\exists c \in]a, b[\text{ tq } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Formule de la moyenne

* on appelle valeur efficace de la fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ la quantité f_{eff} définie par

$$(f_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx$$

5. Etude de $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

① Cas général

Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$

La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est continue sur $[a, b]$

démonstration: $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ f est bornée sur $[a, b]$: $m \leq f(t) \leq M$.

dans la 2^{ème} cas posons $k = \sup(|m|, |M|)$.
 si $x_0 \leq x$ $m(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x-x_0)$
 si $x \leq x_0$ $M(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq m(x-x_0)$ en o donc $|F(x) - F(x_0)| \leq k|x-x_0|$.
 $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0$ k, $0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ (prendre $\alpha = \epsilon/k$).

de plus si $f \geq 0$ alors F est croissante sur $[a, b]$
 si $f \leq 0$ " " " décroissante sur $[a, b]$.

② Cas particulier: f continue sur $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, f est donc intégrable sur $[a, b]$
 la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est donc dérivable sur $]a, b[$.

$$\forall x \in]a, b[\quad F'(x) = f(x)$$

F est dérivable à droite en a de dérivée à droite $f(a)$.

F " " à gauche " b " " " à gauche $f(b)$.

F est donc la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en $x=a$.

Soit G une primitive de f sur $[a, b]$. Soit $\alpha \in [a, b]$.

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^x = G(x) - G(\alpha).$$

démonstration soit f continue en $x_0 \in]a, b[$ montrons que F est dérivable en x_0 .

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

d'après la formule de la moyenne.

si $h > 0$ il existe un réel c_h dans $[x_0, x_0+h]$ tel que $f(c_h) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$.

si $h < 0$ " " " " c_h " $[x_0+h, x_0]$ " " $f(c_h) = -\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$.

or $|c_h - x_0| \leq |h|$ et $|c_h' - x_0| \leq |h|$.

$$f \text{ est continue en } x_0 \text{ donc } \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 & |h| \leq \alpha \Rightarrow |f(c_h) - f(x_0)| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 & |h| < \alpha \Rightarrow |f(c_h') - f(x_0)| < \epsilon. \end{cases}$$

$$\text{En conclusion } \forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \quad |h| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon$$

$$\text{ce qui montre que } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \right) = f(x_0)$$

F est donc dérivable en x_0 de nombre dérivé $f(x_0)$.

démonstration analogue en $x_0=a$ pour la dérivée à droite, en $x_0=b$ pour la dérivée à gauche.

6. Compléments

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Soient α et β deux fonctions définies de J sur I .

$$\text{Soit } F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \quad F'(x) = \beta'(x) \cdot f(\beta(x)) - \alpha'(x) \cdot f(\alpha(x)).$$

$$\text{Soit } G \text{ une primitive de } f \quad F(x) = [G(t)]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G(\beta(x)) - G(\alpha(x))$$

$$F'(x) = \beta'(x) \cdot G'(\beta(x)) - \alpha'(x) \cdot G'(\alpha(x))$$

$$= \beta'(x) \cdot f(\beta(x)) - \alpha'(x) \cdot f(\alpha(x))$$