

FONCTIONS de PLUSIEURS

VARIABLES.

ex: coût de la vie $\Rightarrow$ de nombreuses variables qui définissent un espace sur lequel est définie la fonction.

point de l'espace des variables: $v_1, v_2, \dots, v_n$

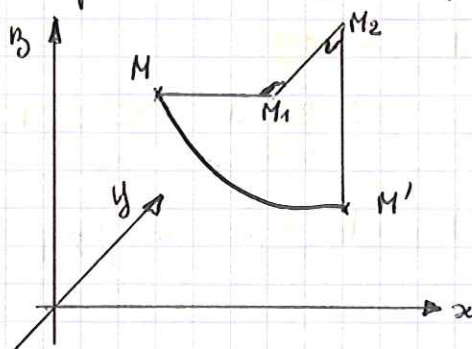
1: Continuité, dérivabilité de la fonction:

ex: $T(x, y, z)$ température d'un local.

La fonction T est continue en $M(x, y, z)$ si on peut trouver M' voisin de M

et tel que: $|T(M') - T(M)| < \epsilon \rightarrow 0$

Variation de T quand on passe de $M(x, y, z)$ à $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$



$$d\vec{M}(dx, dy, dz) = \vec{MM'}$$

$$T(M') = T_{M'} - T_{M2} + T_{M2} - T_{M1} + T_{M1} - T_M + T_M$$

$$T_{M'} - T_M = \underbrace{T_{M'} - T_{M2}}_a + \underbrace{T_{M2} - T_{M1}}_b + \underbrace{T_{M1} - T_M}_c$$

$$c \Rightarrow T(x+dx, y, z) - T(x, y, z) = \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \cdot dx$$

$$b \Rightarrow T(x+dx, y+dy, z) - T(x+dx, y, z) = \frac{\partial T(x+dx, y, z)}{\partial y} \cdot dy$$

$$a \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial z}(x+dx, y+dy, z) \cdot dz$$

$$b \text{ s'écrit: } \frac{\partial}{\partial y} \left[T(x, y, z) + \frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z) dx \right] dy$$

$$a \text{ s'écrit: } \frac{\partial}{\partial z} \left[T(x+dx, y, z) + \frac{\partial T}{\partial y}(x+dx, y, z) dy \right] dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left[T(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} T(x, y, z) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} T(x, y, z) dy \right) dx \right] dz$$

$$T_{M'} - T_M = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

$T_{M'} - T_M$ est la différentielle totale de T au point M .

$$T_{M'} - T_M = \left[\frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} dy dz$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz$$

→ différentielle totale de T au point M

$$\text{avec } \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

2: Théorème des accroissements finis :

$T_{M'} - T_M$ peut être assimilée à $\frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$ si M' est assez près de M (condition vite dépassée en physique)

3: Gradient de T :

$$\text{grad } T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad dT = \vec{\text{grad } T} \cdot d\vec{M}$$

4: Opérateur Nabla ∇ :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{ex: } \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{divergence de } \vec{V}: \quad \nabla \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

la divergence mesure le flux de matériaux sortant.

rotationnel de $\vec{V}$:

$$\nabla \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

* Applications: Modèle de flamme : pour $z \geq 0$

$$T(x, y, z) = T_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} - \frac{z}{z_0}}$$

$$T_0 = 800 \text{ K} \quad r_0 = 4 \text{ cm} \\ z_0 = 5 \text{ cm}$$

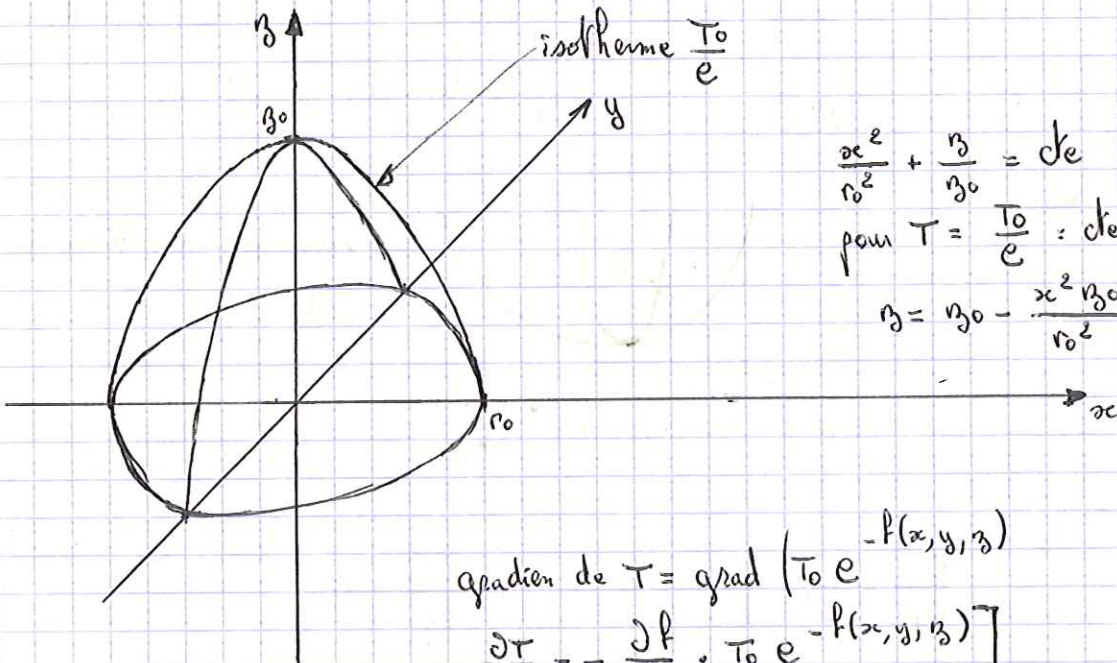
• Température en $O(0,0,0) \rightarrow T_0$

en $M_1(r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta, 0) \rightarrow \frac{T_0}{e}$

en $M_2(0,0,z_0) \rightarrow \frac{T_0}{e}$

• Lieu des points où $T = \frac{T_0}{e}$ (isotherme)

• gradient de T - orientation / isotherme
- unité



$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{z}{z_0} = \text{cte}$$

$$\text{pour } T = \frac{T_0}{e} : \text{cte} = 1$$

$$z = z_0 - \frac{x^2 z_0}{r_0^2}$$

gradient de $T = \text{grad} (T_0 e^{-f(x,y,z)})$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot T_0 e^{-f(x,y,z)} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \cdot T_0 e^{-f(x,y,z)} \\ \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z} \cdot T_0 e^{-f(x,y,z)} \end{bmatrix} = T(x,y,z) \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{r_0^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{r_0^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{en } M \begin{pmatrix} x = r_0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix} : \text{grad } \frac{T_0}{e} \begin{pmatrix} \frac{2}{r_0} \\ 0 \\ \frac{1}{z_0} \end{pmatrix}$$

$$dT = \text{grad } T \cdot d\vec{M} \Rightarrow \text{grad } T \perp \text{isothermes } (dT=0)$$

en un point quelconque : $\text{grad } T \perp \text{isotherme}$

la dimension d'une dérivée est : m^{-1}

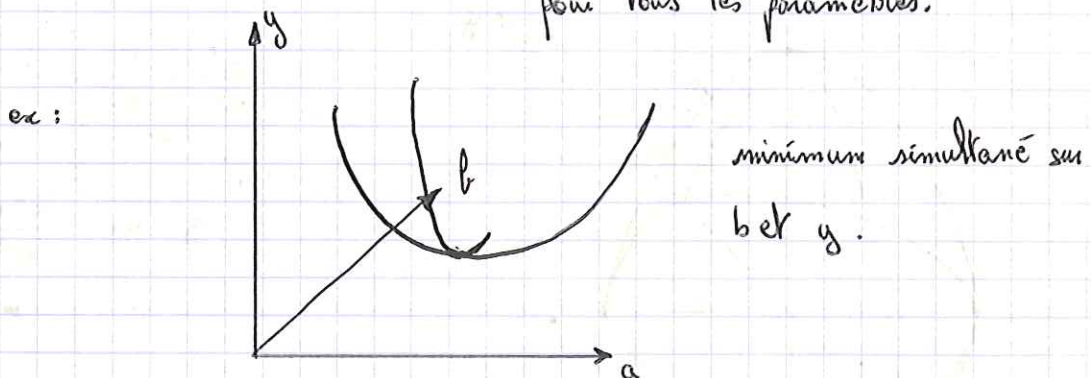
5: Méthode de moindre carré

Soit une procédure pratique $\rightarrow$ mesures, choses observées, : Y_i^o
avec $1 \leq i \leq n$

Modèle théorique permettant de calculer des valeurs de Y^e comme des fonctions d'un certain nb de paramètres : $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Problème : Trouver les meilleurs paramètres rendant compte au mieux des observées par le calcul.

Réponse : - si on a des bonnes mesures } la fonction $Q = \sum_i (Y_i^e - Y_i^o)^2$
- si on a un bon modèle } présente un minimum simultané
pour tous les paramètres.



$$\frac{\partial Q}{\partial p_1} = 0 ; \frac{\partial Q}{\partial p_2} = 0 \dots ; \frac{\partial Q}{\partial p_n} = 0.$$

* n paramètres $\Rightarrow n$ équations à résoudre.

on a donc comme résultat des paramètres calculés qui seront les meilleurs possibles en vertu du théorème de GAUSS-MARKOW

$$\text{on a : } \frac{\partial Q}{\partial p_j} = \sum_i 2(y_i^c - y_i^o) \frac{\partial y_i^c}{\partial p_j} = 0$$

avec $1 \leq j \leq n$

$$\text{si ces équations sont satisfaites, alors } \sigma^2 = \frac{\sum (y_i^c - y_i^o)^2}{m-n}$$

* expérience classique de radioactivité:

On compte des désintégrations pendant un certain temps en heure:

temps (h) :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	Sans source
n° de désintégration: en 30s : $N(t_i)$	1130	950	907	765	689	577	515	478	416	407	^{calculé}	142	$N_0 = 100$ (30s)
Modèle :	$N(t) = N_0 + N_A \cdot 2^{-\frac{t}{t_0}}$												

avec $t_0 = \text{période} = \frac{1}{2} \text{ durée de vie d'un élément radioactif}$

Ce sont des logs népériens.

$N_A = \text{activité initiale de la source.}$

$$\Leftrightarrow \log(N(t) - N_0) = \log N_A - \frac{t}{t_0} \log 2 \quad (\text{transformation faite pour avoir la linéarité}).$$

Les paramètres sont N_A et t_0 : soit $p_1 = \log N_A$

$$p_2 = \frac{1}{t_0} \log 2$$

$$y_c = \log(N(t) - N_0)$$

on a donc modélisation:

$$\frac{\partial y_c}{\partial p_1} = 1$$

$$\frac{\partial y_c}{\partial p_2} = -t$$

$$y^o = \log(N - N_0)$$

$$\sum_i \left[\log(N_i^c - N_0) - \log(N_i^o - N_0) \right] = 0 \quad \textcircled{a}$$

$$\sum_i \left[\log(N_i^c - N_0) - \log(N_i^o - N_0) \right] t_i = 0 \quad \textcircled{b}$$

$$a) \Rightarrow \sum_i (p_1 - p_2 t_i - \log(N(t_i) - N_0)) = 0$$

$$\Rightarrow n p_1 - (\sum_i t_i) p_2 - \sum \log(N(t_i) - N_0) = 0$$

$$b) \Rightarrow p_1 \sum_i t_i - p_2 \sum_i t_i^2 - \sum \log(N(t_i) - N_0) t_i = 0$$

$$\Leftrightarrow n p_1 - (\sum_i t_i) p_2 = \sum \log(N(t_i) - N_0) = p_1 \sum_i t_i - p_2 \sum_i t_i^2$$

Calculer les quantités données par l'expérience :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	N_0	$\sum_i t_i = 65$
$N - N_0$	1030	850	807	669	587	477	445	378	346	307		42	100	
$\log(N - N_0)$	6,94	6,74	6,69	6,5	6,37	6,47	6	5,93	5,75	5,72		3,73		66,58
$t_i \log(N - N_0)$	0	6,79	13,38	19,5	25,44	30,9	36,12	41,51	46	51,48		74,6		345,71
t_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	400		685

application numérique :

$$\left. \begin{aligned} 11 p_1 - 65 p_2 &= 66,58 \\ 65 p_1 - 685 p_2 &= 345,71 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$p_1 = \frac{-(\sum \log) \sum t_i^2 + (\sum t_i \log) \cdot \sum t_i}{-n \sum t_i^2 + (\sum t_i)^2} = \log N_a$$

$$p_2 = \frac{n \sum t_i \log - (\sum t_i)(\sum \log)}{(\sum t_i)^2 - n \sum t_i^2} = \frac{\log 2}{t_0}$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{-66,58 \cdot 685 + 345,71 \cdot 65}{(65)^2 - 11 \cdot 685} = 6,98$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{11 \cdot 345,71 - 65 \cdot 66,58}{(65)^2 - 11 \cdot 685} = 9,158$$

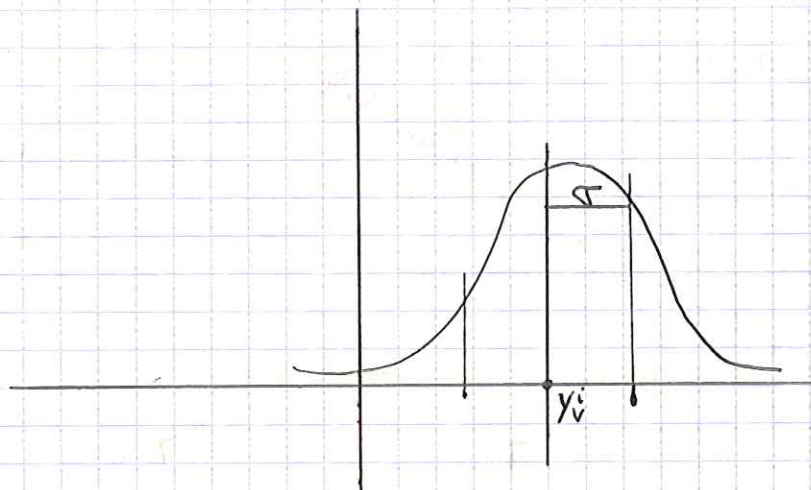
$$\Rightarrow t_0 = 4,39 \text{ h}$$

$$\Rightarrow N_a = 1085$$

On peut recalculer pour évaluer la qualité de notre expérience :

variance expérience :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (Y_i^c - Y_i^o)^2}{n - m}$$



Variance des paramètres :

$$\begin{array}{c} \vec{y^o} \\ \left| \begin{array}{c} y_1^o \\ \vdots \\ y_n^o \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} y_{\text{vrai}} \\ \left| \begin{array}{c} y_1^v \\ \vdots \\ y_n^v \end{array} \right| \end{array} + \begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \Sigma_n \end{array} \right| \end{array} \Rightarrow y^o = y^v + \Sigma$$

observées inc. erreurs

$$\begin{array}{c} y_1^c \\ \left| \begin{array}{c} \vdots \\ y_n^c \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} m \text{ colonnes} \\ \left| \begin{array}{c} \vdots \\ m \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} p_1 \\ \left| \begin{array}{c} \vdots \\ p_m \end{array} \right| \end{array}$$

si toutes les mesures sont de
qualités égales.

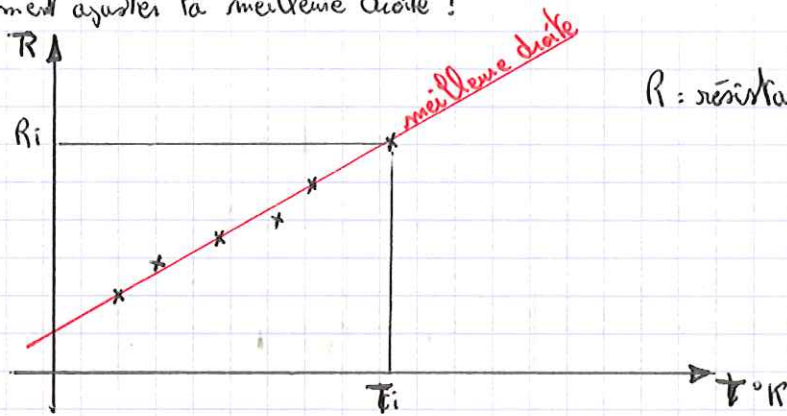
On calcule la matrice E : matrice espérance des paramètres :

$$E = \sigma^2 (M^T M)^{-1} = \sigma^2 V \quad \text{avec } V = \text{matrice variance}$$

T : transposée : matrice dont la 1^{ère} ligne devient 1^{ère} colonne etc...

$$\text{alors : } \left. \begin{array}{l} \Delta p_1 = \sqrt{\sigma^2 V_{11}} \\ \Delta p_2 = \sqrt{\sigma^2 V_{22}} \end{array} \right\} \text{incertitudes sur les paramètres } p_1 \text{ et } p_2$$

* Comment ajuster la meilleure droite ?



R : résistance d'un matériau.

n points (R_i, T_i) . L'incertitude porte sur les R_i .

$$R(T) = A + BT$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial R^c}{\partial A} = 1 \\ \frac{\partial R^c}{\partial B} = T \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum_i (A + BT_i - R_i) = 0 \\ \sum_i (A + BT_i - R_i) T_i = 0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow nA + (\sum_i T_i) B = \sum_i R_i \\ \Leftrightarrow (\sum_i T_i) A + (\sum_i T_i^2) B = \sum_i T_i R_i \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sum_i R_i \sum_i T_i^2 - \sum_i R_i T_i \sum_i T_i}{n \sum_i T_i^2 - (\sum_i T_i)^2}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{n \sum_i R_i T_i - (\sum_i T_i)(\sum_i R_i)}{n \sum_i T_i^2 - (\sum_i T_i)^2}$$