

Les dérivées partielles

x, y, z sont des variables.
définissant l'état : $P, v, T, \dots$
 f est une fonction d'état :
 $G, H, S, \dots$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\text{soit } \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \right]_y = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \right]_x$$

① x, y dépendent de z . $\begin{pmatrix} x = v \\ y = P \\ z = T \end{pmatrix}$

comment f varie lorsque x varie à z est.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z$$

② si x, y, z sont reliés par une équation d'état.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z}$$

③ si x, y, z sont reliés

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \quad \text{et en reliant ② et ③}$$

on obtient la chaîne d'Euler.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

④ différentielle exacte.

simple.

$$df = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_y$$

I/ Dans un repère cartésien $Oxyz$, la vitesse $\vec{V}$ d'un mobile a pour composantes, en m.s^{-1} : $(100, 70, 30)$.

Valeur de la vitesse du mobile? $\|\vec{V}\| = \sqrt{100^2 + 70^2 + 30^2} = 125,6 \text{ m.s}^{-1}$

Composante de vitesse du mobile dans une direction caractérisée par le vecteur unitaire $\vec{n} (0,1; 0,5; 0,86)$.
(vérifier que ce vecteur $\vec{n}$ est unitaire).

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{0,1^2 + 0,5^2 + 0,86^2} = 1$$

$$\text{vitesse suivant } \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n} = \begin{vmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,86 \end{vmatrix} = 70,8 \text{ m/s}$$

II/ Que représente dans le repère $Oxyz$ la fonction $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?
 ρ est le module de la vitesse. Distance OM

Calculer la dérivée de cette fonction, en la considérant comme une fonction de x . [le résultat obtenu est la dérivée partielle $\frac{\partial \rho}{\partial x}$].

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{2\sqrt{u}}$$

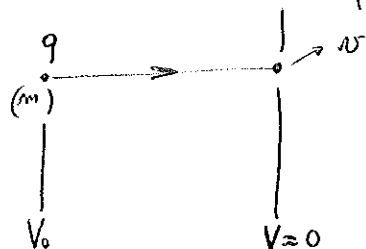
calculer aussi $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial z}$. Caractériser en module et en direction et sens le vecteur de composantes $(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z})$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{vmatrix} = \text{gradient de } \rho$$

III/ Une particule de charge q et de masse m part avec une vitesse nulle d'une région de potentiel électrique $V_0 > 0$ ($q > 0$). Quelle est sa vitesse lorsqu'elle arrive dans une région de potentiel $V = 0$?

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{avec} \quad E_p = q(V_0 - V) \quad E_p + E_c = 0$$

$$\text{lorsqu'elle arrive ds } V = 0 : \quad v = \sqrt{\frac{2q(V_0 - V)}{m}} = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$



$$\text{gradient de } \rho = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{\vec{OM}}{\rho} = \frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|} = \vec{e}_r$$

vecteur unitaire de $\vec{OM}$