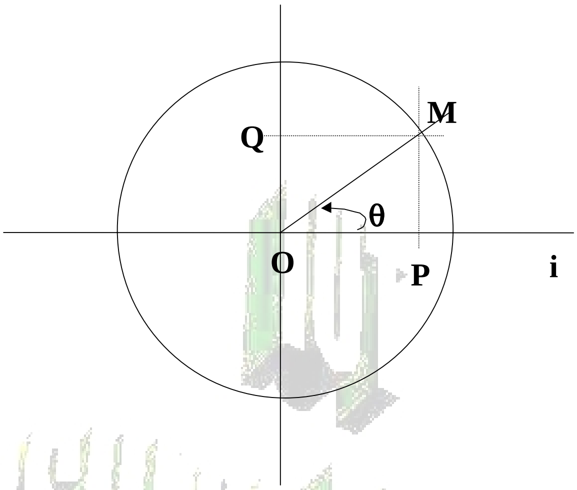
Formulaire de Math

M. Morales, Laboratoire d'Etudes et de Recherche sur les MATériaux, ISMRa, Caen

D. Chateigner, Laboratoire CRIstallographie et Sciences des MATériaux, ISMRa, Caen

1) Trigonométrie usuelle



$$\vec{OP} = \cos\theta\ \vec{i}\ ;\ OQ = \sin\theta\ \vec{j}\ ;\ OM = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$

1.1. Valeurs remarquables:

	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
Sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
Tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0

Un moyen mnémotechnique pour retenir les valeurs du sinus de 0, π/6, π/4, π/3 et π / 2 consiste à écrire ces valeurs sous la forme $\sqrt{0}/2$, $\sqrt{1}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{4}/2$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ avec $x \neq \pi/2 + k\pi$ $\quad$ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\quad$ $\tan(-x) = -\tan x$

1.2. Formules d'addition:

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\quad$ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\quad$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ $\quad$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$ $\quad$ $\sin 3a = -4 \sin^3 a + 3 \sin a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

1.3. Formules de transformation:

$\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

si $t = \tan \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}$ alors $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

1.4. Fonctions circulaires:

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ $\tan x = i \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$

Pour tout nombre réel : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

1.5. Fonctions circulaires réciproques:

Pour tout nombre réel x appartenant à [-1, 1] : $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ et $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

$\arctan a + \arctan(1/a) = \pi/2$ si $a > 0$ et $-\pi/2$ si $a < 0$.

Si y = arccos x alors x = cos y ; si y = arccos x alors x = sin y ; si y = arctan x alors x = tan y. *Sur vos calculatrices ces fonctions réciproques correspondent aux boutons* tan^{-1}, cos^{-1} *etc.. !!!! (mais aussi on peut trouver atan, acos….) Attention dans le premier cas:* $tan^{-1}x = 1/ \tan x$ *au sens mathématique, c'est très différent de arctan(x) !!!*

$\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) Fonctions logarithmes, exponentielles

2.1. Fonctions exponentielles:

$y = e^x$ avec x réel et $y > 0$.

$e^{x+y} = e^x e^y$ $e^{x-y} = e^x / e^y$ $e^{rx} = (e^x)^r = (e^r)^x$ $e^1 = e$ et $e^0 = 1$

Fonction exponentielle de base a: $a^x = e^{x \ln a}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $(ab)^x = a^x b^x$

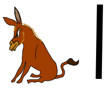
Fonction puissance: x^α avec α nombre réel.

2.2. Fonctions logarithme népérien:

$y = \ln x$ avec $x > 0$ et y réel.

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\qquad$ $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ $\qquad$ $\ln(a^n) = n \ln a$

$\ln 1 = 0$ $\qquad$ $\ln e = 1$



$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$!!!

Si $y = \ln x$ alors $x = e^y$ et si $y = \ln x$ alors $x = e^y$: voir fonctions réciproques.

2.3. Fonctions logarithme décimal:

(logarithme en base 10):

$y = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

3) Fonctions hyperboliques

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ \text{ et th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Pour tout nombre réel : $e^x = \text{ch } x + \text{sh } x$ et $e^{-x} = \text{ch } x - \text{sh } x$; $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

$\text{ch } (a + b) = \text{cha} * \text{chb} + \text{sha} * \text{shb}$ $\qquad$ $\text{ch } (a - b) = \text{cha} * \text{chb} - \text{sha} * \text{shb}$

$\text{sh } (a + b) = \text{sha} * \text{chb} + \text{cha} * \text{shb}$ $\qquad$ $\text{sh } (a - b) = \text{sha} * \text{chb} - \text{cha} * \text{shb}$

$\text{th } (a + b) = \dfrac{\text{tha} + \text{thb}}{1 + \text{tha thb}}$ $\qquad$ $\text{th } (a - b) = \dfrac{\text{tha} - \text{thb}}{1 - \text{tha thb}}$

$\text{ch } 2a = \text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1 + 2\text{sh}^2 a = 2\text{ch}^2 a - 1$ $\qquad$ $\text{sh } 2a = 2 \text{ sha ch}$

$\text{ch } 3a = 4 \text{ ch}^3 a - 3 \text{ ch } a$ $\qquad$ $\text{sh } 3a = 4 \text{ sh}^3 a + 3 \text{ sh } a$

$\text{th } 2a = \dfrac{2 \text{ tha}}{1 + \text{th}^2 a}$ $\qquad$ $1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$

si $t = \text{th } \dfrac{x}{2}$ alors $\text{sh } x = \dfrac{2t}{1 - t^2}$; $\text{ch } x = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2}$ et $\text{th } x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

4) Fonctions d'une seule variable réelle

4.1. Dérivée:

Soit f une fonction d'une seule variable x. La dérivée de f au point x_0 est $f'(x_0)$ et on a:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Formule de Taylor-Lagrange: Soient n un entier et f une fonction n fois dérivable sur un intervalle [a, b] et n+1 fois sur]a, b[; il existe c de]a, b[tel que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Fonctions	**Dérivées**
x^n	nx^{n-1}
$u(x)^n$	$n\ u^{n-1}(x)\ u'(x)$
e^{cx}	ce^{cx}
a^x	$a^x * \ln a$
$U(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$U(x) * v(x)$	$U'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$
$(g\circ f)(x)$	$f'(x) * g'(f)(x)$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\ln\|x\|$	$1/x$
$\log\|x\|$	$1/(x \ln 10)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$
$\mathrm{th}\ x$	$1/\mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{th}^2 x$
$\mathrm{Arccos}\ x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arcsin}\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arctan}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$

4.2. Primitive et Intégrale:

4.2.1. Tableau des Primitives:

k étant une constante quelconque:

Fonctions	**Primitives**
$(x-c)^n$	$\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k$
e^{cx}	$\frac{e^{cx}}{c} + k$
$\ln \lvert x \rvert$	$x(\ln x - 1) + k$
$\frac{1}{x-a}$	$\ln \lvert x - a \rvert + k$
$\cos x$	$\text{Sin } x$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert + k$
$\text{ch } x$	$\text{sh } x + k$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x + k$
$\text{th } x$	$\ln \lvert \text{ch } x \rvert + k$
$U^r(x)\, u'(x)$	$\frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + k$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + k$

4.2.2. Calculs d'intégrales:

- par changement de variables: $\int_a^b f(g(t))dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$.
- par parties: $\int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt$.

<u>4.3. Développement limité:</u>

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P(x) de degré inférieur à n tel que f(x) – P(x) soit négligeable devant $(x - x_0)^n$. On note $P_n(f)$ le développement limité de f à l'ordre n.

<u>4.3.1. Formule de Taylor-young:</u>

$$f(x) = P_n(f) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

4.3.2. Exemples Fondamentaux:

au voisinage de 0

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ où $n\,! = 1*2*3*4*\ldots*n$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

$\arctan x = x + \ldots$

$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

$\mathrm{th}\, x = x + \ldots$

$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

5) Fonctions de plusieurs variables réelles

Soit f une fonction dépendant des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$,notée $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$.

5.1. Dérivées partielles:

On appelle dérivée partielle de f par rapport à x_j la dérivée de f par rapport à x_j avec $x_{i \neq j}$ constants:

$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

5.2. Différentielle:

On appelle différentielle de f:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\ dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\ dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\ dx_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i, celle-ci se note: $f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

On dit que f admet une différentielle totale exacte df si:

$$f''_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}$$

5.3. Dérivée d'un vecteur:

Différentielle d'un vecteur: soit $\overrightarrow{OM}$ un vecteur, la différentielle de $\overrightarrow{OM}$ est notée $d\overrightarrow{OM}$.

Coordonnées cartésiennes: $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$ $\quad d\overrightarrow{OM} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j} + dz\ \vec{k}$

Coordonnées polaires: $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u}_r$ $\quad d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{u}_r + rd\theta\ \vec{u}_\theta$

Coordonnées cylindriques: $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u}_r + z\ \vec{u}_z$ $\quad d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{u}_r + rd\theta\ \vec{u}_\theta + dz\ \vec{u}_z$

Coordonnées sphériques: $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u}_r$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{u}_r + rd\theta\ \vec{u}_\theta + r\sin\theta\ \vec{u}_\varphi$$

6) Produit scalaire et vectoriel

6.1. Produit scalaire:

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ faisant un angle θ entre eux; on appelle produit scalaire:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta$$

c'est un scalaire !!!!

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$: norme du vecteur $\vec{u}$ = distance.

Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ ou un des deux vecteurs est nul.

Méthode de calcul : $\vec{u} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$: $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$.

6.2. Produit vectoriel:

* Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ faisant un angle θ entre eux; on appelle produit vectoriel:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \wedge \|\vec{v}\|.\sin\theta\ \vec{u}_w$$

c'est un vecteur !!!!

et $\vec{u}_w$ est le vecteur unitaire porteur de $\vec{w}$

On a $\vec{w} \perp \vec{v}$ et $\vec{w} \perp \vec{u}$.

Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (parallèles) ou un des deux vecteurs est nul.

<u>Méthode de calcul</u>: $\vec{u} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ et on a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1.z_2 - y_2.z_1 \\ z_1.x_2 - z_2.x_1 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{vmatrix}$.

* Double produit vectoriel: $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \wedge \vec{v})\,\vec{w}$.