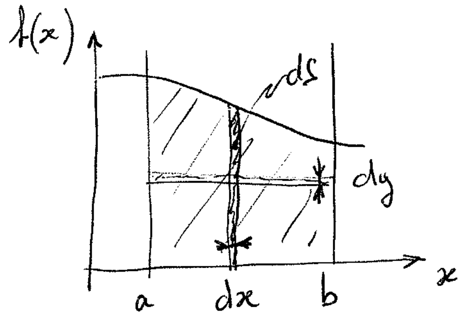
Rappels sur les calculs intégrals - Intégrale Multiple

I Calculs de surface et de volume



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Le calcul consiste à décomposer la surface en petits éléments de surface de largeur dx si petite que f(x) puisse être considérée comme cte. On a alors :

$$dS = f(x)\,dx$$

et en ajoutant tous les dS on obtient S : $S = \int dS$

Intégrer la fonction f(x), c'est effectuer cette somme.

La hauteur f(x) est elle obtenue par intégrat° de l'élément de hauteur dy, sommé de 0 à f(x) :

$$\int_0^{f(x)} dy = [y]_0^{f(x)} = f(x)$$

On a ainsi :

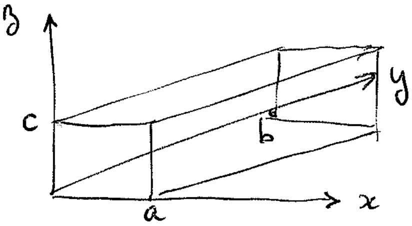
$$S = \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} dy \right] dx = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy\,dx$$

$$\rightarrow \boxed{S = \iint_S dx\, dy}$$

$dx\, dy$ représente l'élément de surface.

Par extension en 3D : $$\boxed{V = \iiint_V dx\, dy\, dz}$$

ex :



$dV = dx\, dy\, dz$

$V = \iiint dV$

$$V = \int_0^a \int_0^b \int_0^c dx\, dy\, dz = [x]_0^a\, [y]_0^b\, [z]_0^c = abc$$

II Intégration de fonctions sur des surfaces et des volumes

$$I = \int f(M)\, dV \quad \text{ou} \quad \int f(M)\, dS$$

$$= \iiint f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad \iint f(x,y)\, dx\, dy$$

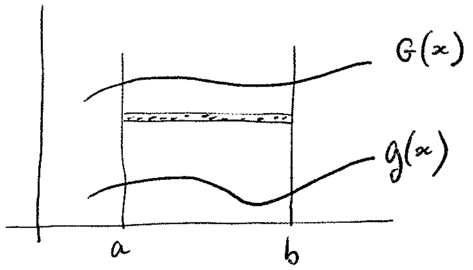
La dimension de I est celle de $f \times V$ (ou $f \times S$).

ex : $\text{masse} = \iiint \text{masse volumique} . dV$

2.1) Cas général

$$I = \iint f(x,y)\,dx\,dy = \ ?$$

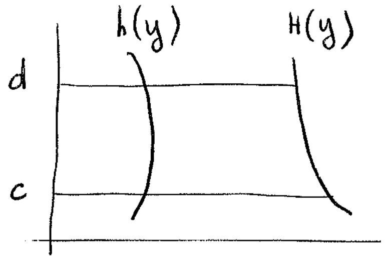
Si l'intégration ~~de~~ sur y fait que l'on dépasse les bornes de l'intégrat sur x :



il faut intégrer sur x en dernier :

$$I = \int_a^b \underbrace{\left[\int_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right]}_{F(x)} dx = \int_a^b F(x)\,dx$$

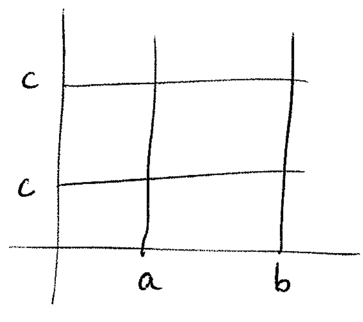
Si les bornes de x dépendent de y :



il faut intégrer sur y en dernier :

$$I = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right]}_{F(y)} dy = \int_x^d F(y)\,dy$$

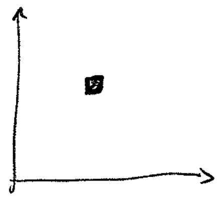
Si les bornes sont toutes constantes :



$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

l'intégrat peut être conduite dans les 2 sens.

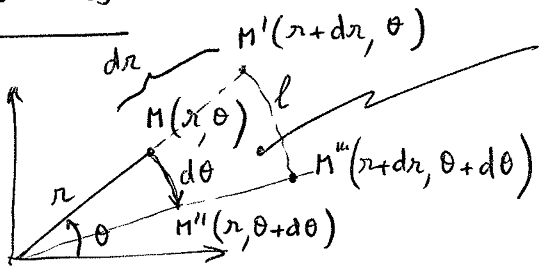
31) Coordonnées cartésiennes



dx
$\square dy$

$$dS = dx\, dy \qquad dV = dx\, dy\, dz$$

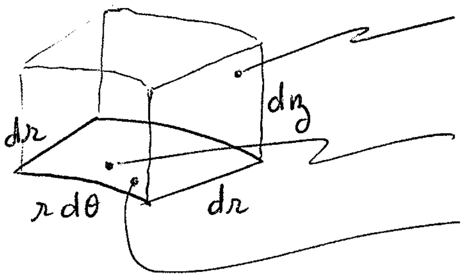
32) Polaires



$$dS = l\, dr$$
$$= r\, d\theta\, dr$$

$$dS = r\, dr\, d\theta$$

33) Cylindriques



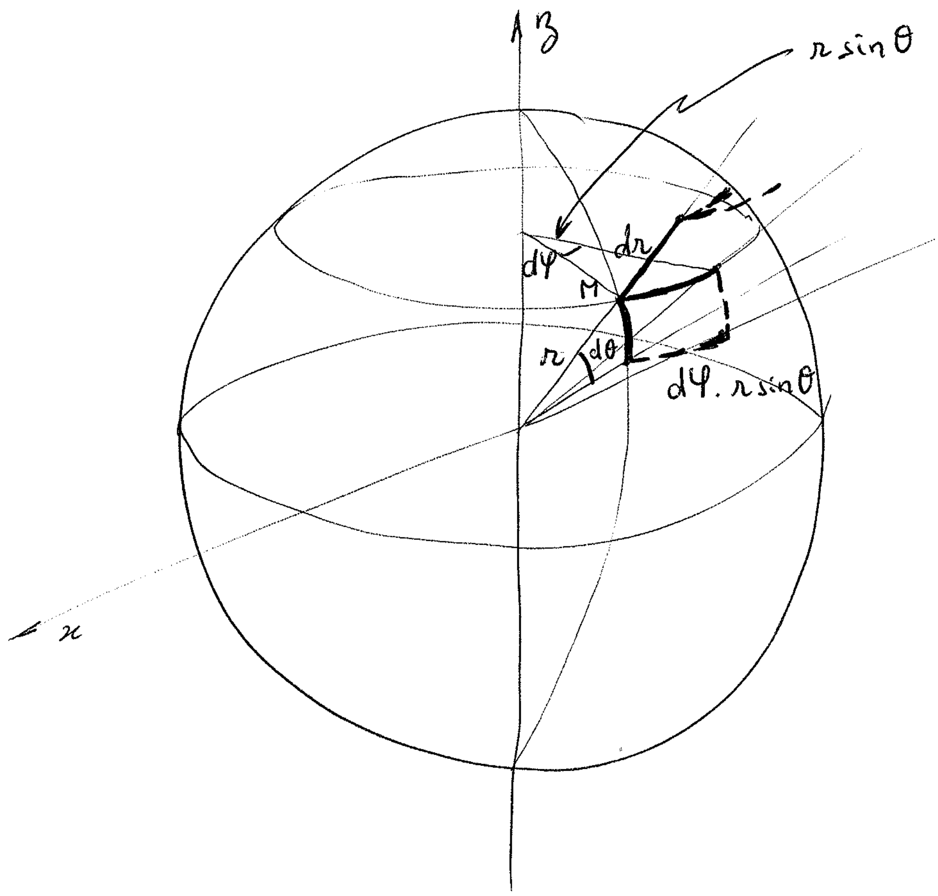
$$dS_1 = dr\, dz$$
$$dS_2 = r dr\, d\theta$$
$$dS_3 = r d\theta\, dz$$

$\rightarrow \quad dV = r\, dr\, d\theta\, dz$

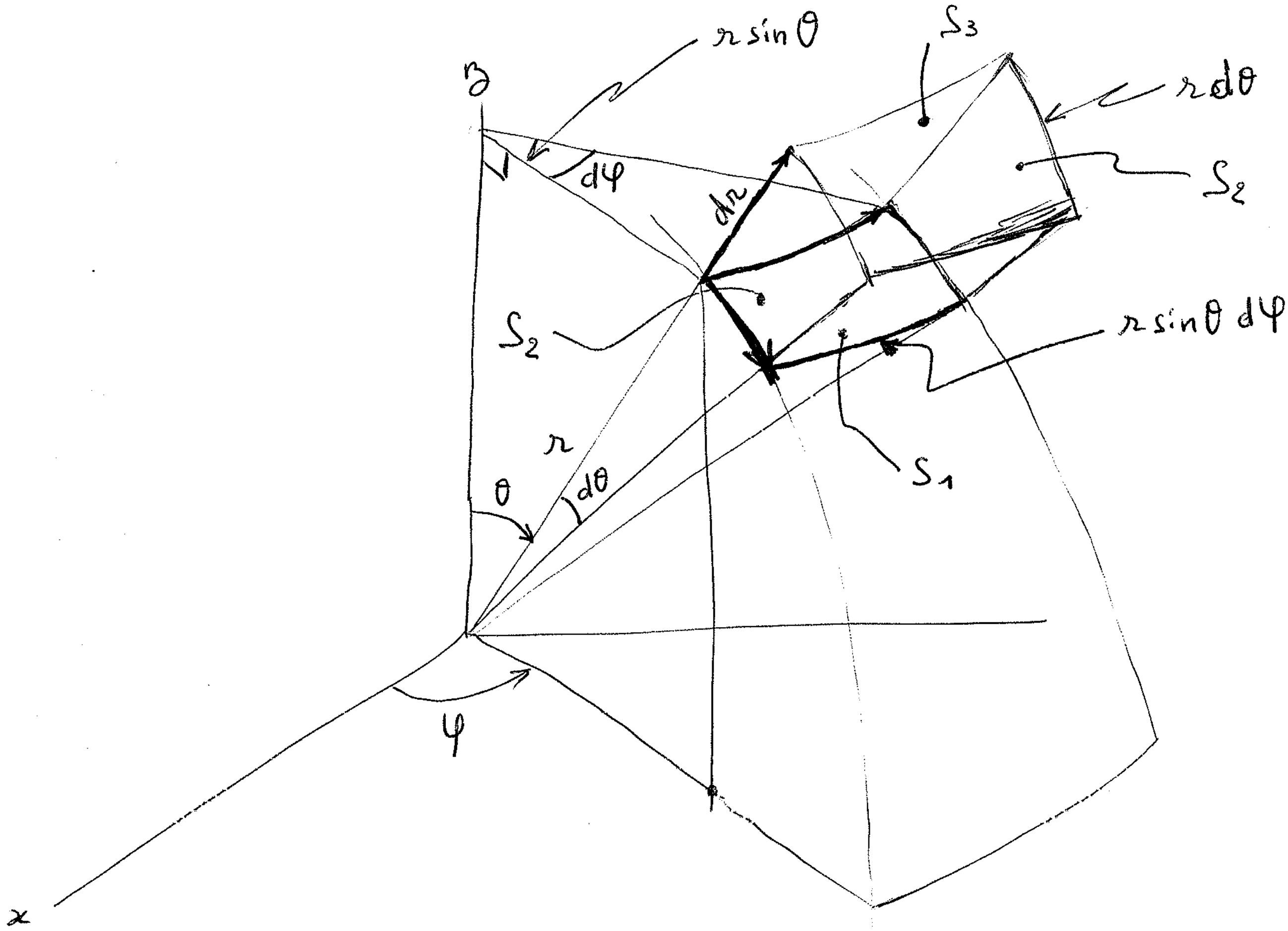
34) Sphérique

Regardons les variations d'1 point M selon les 3 coordonnées r, θ, φ indépendamment :

dr : décrit les "couches" d'un oignon
$d\theta$: recouvre la surface de la terre en calottes
$d\varphi$: découpe des "quartiers" d'orange.


z
r sinθ
dr
dφ
M
r
dθ
dφ. r sinθ
x

IV ——


z
r sinθ
S₃
r dθ
dφ
S₂
dr
S₂
r sinθ dφ
S₁
r
θ
dθ
φ
x

$$S_1 = r\,dr \sin\theta \, d\varphi$$

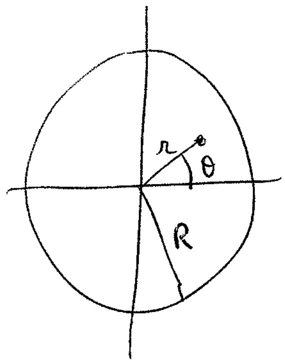
$$S_2 = r\,d\theta \, dr$$

$$S_3 = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dV = r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

IV Exemple

- Calcul de la surface d'un cercle



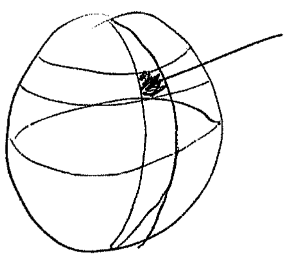
$$S = \int dS = \iint r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$$

- Calcul de la surface de la sphère de rayon R



$$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$S = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi R^2$$

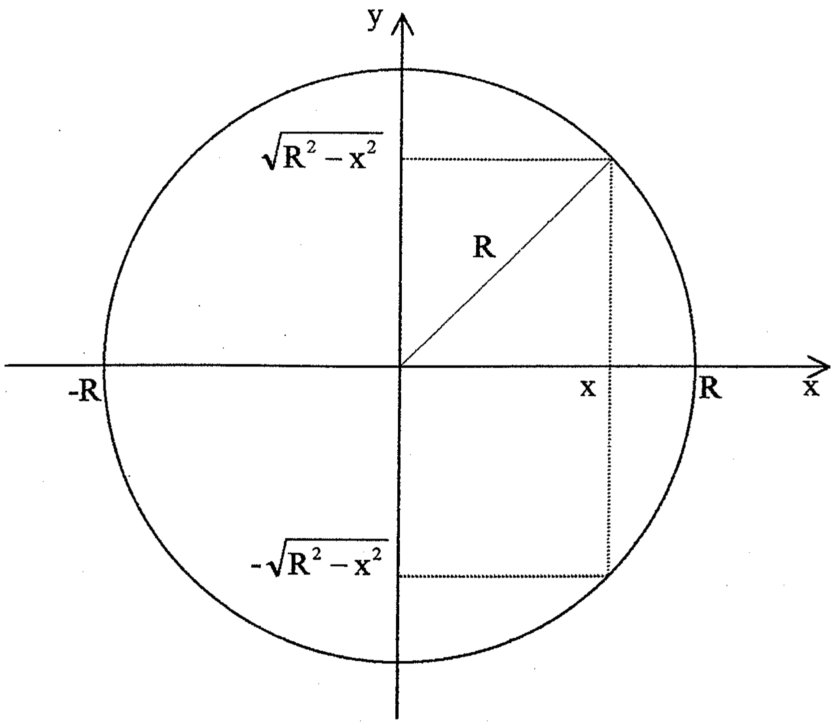
- Calcul du volume de la sphère de rayon R

$$V = \int dV = \iiint r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \qquad 2 \qquad 2\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$



$$I = \int_{\text{cercle}} f(M)\,dS$$

$$I = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dxdy$$