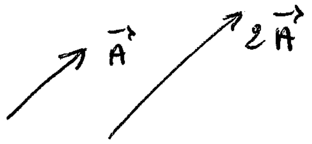
Eléments de calcul vectoriel

I/ Produit scalaire

Vecteur : objet math. caractérisé par une norme, (longueur), une direction, un sens.

Multiplication par un scalaire : donne un vecteur.



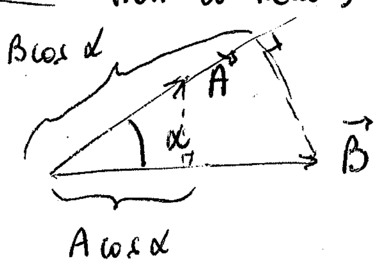
$2\vec{A}$: même directθ, même sens que $\vec{A}$
norme double

On peut × 2 nb entre eux, de même, on peut multiplier 2 vecteurs, la résultante du produit étant un scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \text{scalaire}$$
$$= \|\vec{A}\|^2 = A^2$$

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ colinéaires : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\|$

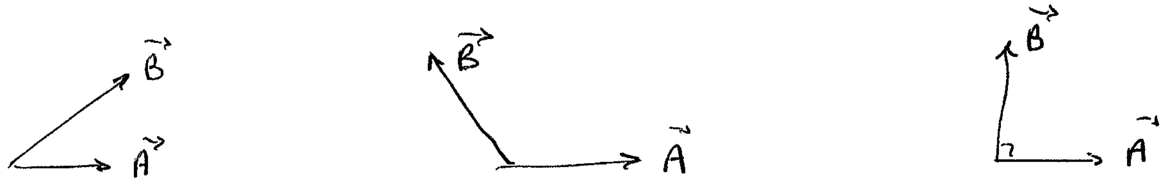
——— non colinéaires : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B})$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \, B \cos\alpha$$
$$= (A \cos\alpha) \, B$$
$$= A \, (B \cos\alpha)$$

1 Définition :

le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos(\vec{A},\vec{B})$



$\vec{A}\cdot\vec{B} > 0$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{B} < 0$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

2 vecteurs $\perp$ ont un prod. scal $= 0$, et inversement, si $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$: $\vec{A} = \vec{B} = \vec{0}$, ou $\vec{A} = \vec{0}$, ou $\vec{B} = \vec{0}$, ou $\vec{A} \perp \vec{B}$.

2 Propriétés :

Distributivité sur la somme :

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

Multiplication par 1 scalaire :

$$\lambda(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(\lambda\vec{B})$$

Commutativité : $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ $\qquad [\vec{A},\vec{B}] = 0$

3 Expression du PS à l'aide des composantes :

Soit une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 1 = \|\vec{\imath}\|^2 \qquad \vec{\jmath}^{\,2} = 1 \qquad \vec{k}^{\,2} = 1$$

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0 \qquad C$$

$$\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \qquad \left(\vec{A} = \sum_i a_i \vec{e_i} \right)$$

$$\vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \qquad \left(\vec{B} = \sum_i b_i \vec{e_i} \right)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}\right) \cdot \left(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}\right)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{1} + a_2 b_1 \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{0} + \ldots$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= \sum_i a_i b_i$$

$$= \left| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \cdot \right| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

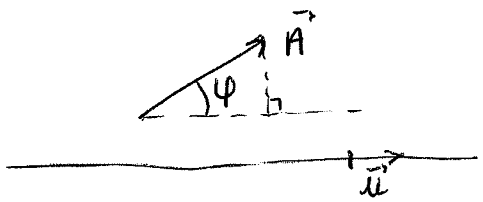
Norme d'1 vecteur : $\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_i a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$$= A^2$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

4, Projection orthogonale d'1 vecteur sur une droite

Vecteur $\vec{A}$, droite de vecteur unitaire $\vec{u}$



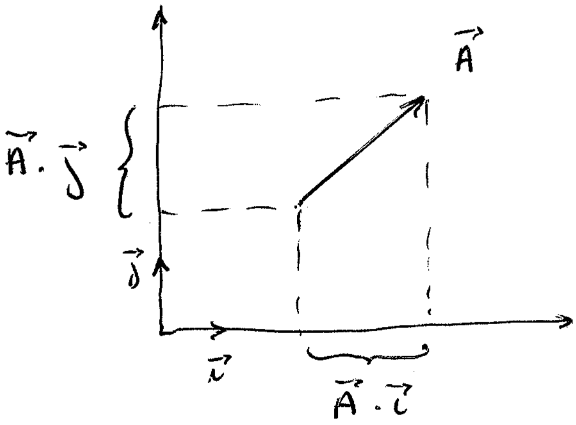
$$\vec{A} \cdot \vec{u} = \|\vec{A}\| \|\vec{u}\| \cos \varphi$$

$$= \|\vec{A}\| \cos \varphi$$

$\vec{A} \cdot \vec{u}$ est la proj. orth. de $\vec{A}$ sur la droite engendrée par $\vec{u}$

5/ Composantes d'1 vecteur

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé



Composantes de $\vec{A}$ = proj. orthogonals de $\vec{A}$ sur les axes :

$$\vec{A} = (\vec{A}\cdot\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{A}\cdot\vec{j})\,\vec{j} + (\vec{A}\cdot\vec{k})\,\vec{k}$$

→ càd : $x = \vec{A}\cdot\vec{i}$; $y = \vec{A}\cdot\vec{j}$; $z = \vec{A}\cdot\vec{k}$

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$= x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

II/ Vecteur unitaire associé à une rotation

1/ Sens direct ($\Leftrightarrow$ sens rétrograde)

Par définition, le sens direct de rotation est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

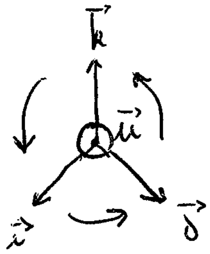
⚠ Ambiguité : ça dépend d'où on regarde !!

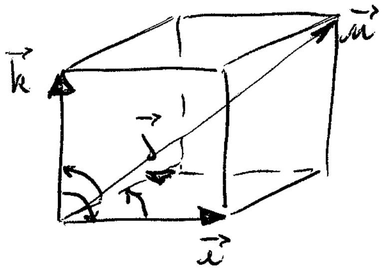
On lève cette ambiguité en décidant d'associer le sens direct à 1 vecteur dirigé vers l'observateur : $\vec{k}\odot$

≡ règle du tire bouchon

2/ Trièdre direct

Le trièdre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct si la rotation $\vec{i} \to \vec{j} \to \vec{k}$ est directe autour de $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:





Règle du bonhomme d'Ampère :

| 1er vecteur : rentre par les pieds, sort par la tête
| 2e " : direction et sens du regard
| 3e " : bras gauche.

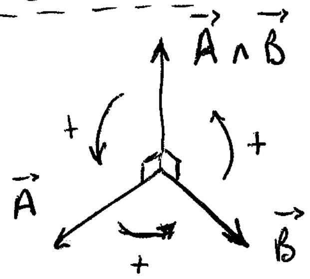
De m̂, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont directs.

3/ Axe orienté

Un axe orienté est un axe muni d'un vecteur unitaire, il est noté $\Delta = (A, \vec{k})$ où A est un point de l'axe et $\vec{k}$ le vecteur unitaire, qui définit l'orientation des angles :

III/ Produit vectoriel

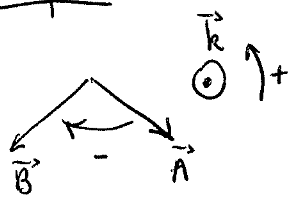
1/ Définition



$\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur de norme $\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B})$, qui est $\perp$ à $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Son sens est tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ forment un trièdre direct

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B}) \, u_{\vec{A} \wedge \vec{B}}$$

exemple :



$\vec{A} \to \vec{B}$ indirect :

$\Rightarrow$ $\vec{A} \wedge \vec{B}$ dirigé vers l'arrière

2/ Propriété

distributivité sur la somme : $(\vec{A} + \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B} \wedge \vec{C}$

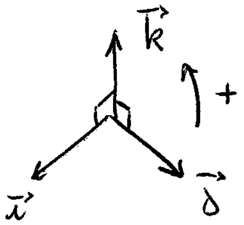
multiplicatio par 1 scalaire : $\lambda (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \lambda \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge \lambda \vec{B}$

Antisymétrie : $\vec{A} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \vec{A}$ (à cause du sinus)

$\equiv$ non commutativité : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \neq (\vec{B} \wedge \vec{A})$

Permutation circulaire du produit mixte : $\underbrace{\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})}_{\text{produit mixte}} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$

3/ Trièdre orthonormé direct



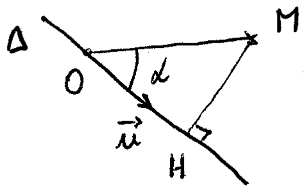
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \underbrace{\|\vec{i}\|}_{1}\,\underbrace{\|\vec{j}\|}_{1}\,\sin\underbrace{(\vec{i}, \vec{j})}_{1}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}}$$

et de m̂ : $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

4/ Distance d'1 point à 1 axe

Soient 1 point M et un axe $\Delta(O, \vec{u})$. La distance de M à Δ s'obtient en proj. orth. M sur l'axe, et c'est la distance MH.



On a :
$$\vec{OM} \wedge \vec{u} = \|\vec{OM}\|\,\|\vec{u}\|\,\sin\underbrace{(\vec{OM}, \vec{u})}_{\alpha}\,\vec{u}_{\vec{OM}\wedge\vec{u}}$$

$$= \|\vec{OM}\| \sin\alpha \; \vec{u}_{\vec{OM}\wedge\vec{u}}$$

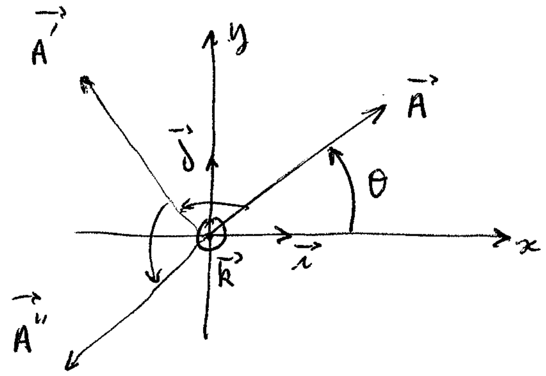
$$= MH \; \vec{u}_{\vec{OM}\wedge\vec{u}}$$

et donc : $\boxed{\|\vec{OM} \wedge \vec{u}\| = MH} = \|\vec{OM}\| \sin\alpha$

la distance d'1 pt M à un axe $(O, \vec{u})$ est la norme du vecteur $\vec{OM} \wedge \vec{u}$

IV) Rotation élémentaire d'1 vecteur

Soit $\vec{A}$ vecteur de norme constante, de direction arbitraire θ repérée par rapport à $\vec{i}$: cherchons la rotation élémentaire de $\vec{A}$ par rapport à θ, $\dfrac{d\vec{A}}{d\theta}$:



on a $\quad \dfrac{d}{d\theta}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) = \dfrac{d\vec{A}}{d\theta}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{A}}{d\theta} = 2\,\vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{A}}{d\theta}$

$$\vec{A}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \qquad \frac{d\vec{A}}{d\theta}\left|\begin{matrix} dx/d\theta \\ dy/d\theta \\ dz/d\theta \end{matrix}\right.$$

$$\begin{aligned} x &= A\cos\theta \\ y &= A\sin\theta \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{d\theta} = \left|\begin{matrix} -A\sin\theta \\ A\cos\theta \\ 0 \end{matrix}\right. = \vec{A}'$$

$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{A}}{d\theta} = 0 \quad$ ET $\quad \left\|\dfrac{d\vec{A}}{d\theta}\right\| = \sqrt{A^2\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta} = A$

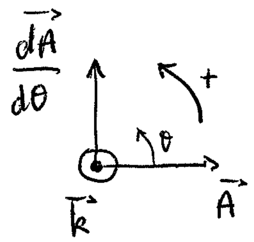
$\Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{d\vec{A}}{d\theta} \text{ est obtenu en faisant tourner } \vec{A} \text{ de } +\dfrac{\pi}{2}}$

de m^1, $\vec{A}'' = \dfrac{d^2\vec{A}}{d\theta^2}$ est obtenu en faisant tourner $\vec{A}'$ de $+\dfrac{\pi}{2}$

puisque $\vec{A} \cdot \dfrac{d\vec{A}}{d\theta} = 0$, $\vec{A} \perp \dfrac{d\vec{A}}{d\theta}$, on doit pouvoir exprimer $\dfrac{d\vec{A}}{d\theta}$ comme un produit vectoriel :

$$\| \vec{k} \wedge \vec{A} \| = \| \vec{k} \| \, \| \vec{A} \| \sin (\vec{k}, \vec{A}) = \| \vec{A} \| = \left\| \frac{d\vec{A}}{d\theta} \right\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} \wedge \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{d\theta}}$$



6/9/01
1/04