

Probabilités - Définitions

- Variable aléatoire continue

Une variable X peut prendre toute valeur dans l'intervalle A, B (eventuellement $-\infty, +\infty$)

La loi de probabilité est connue si on sait calculer, pour tout intervalle (a, b) la probabilité pour que X soit compris entre a et b :

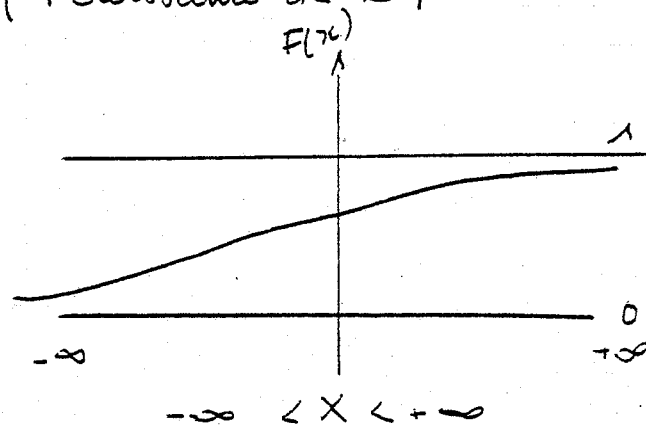
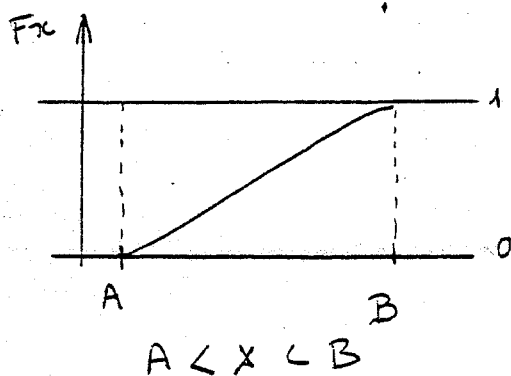
$$\text{Prob}(a \leq X < b)$$

Fonction de répartition $F(x) = \text{Prob}(X < x)$

$$\text{si } a < b : \text{Prob}(X < b) = \text{Prob}(X < a) + \text{Prob}(a \leq X < b)$$

$$F(b) = F(a) + \text{Prob}(a \leq X < b)$$

Allure de la fonction de répartition (Croissante de x)



La loi de probabilité peut également être définie à l'aide d'une fonction à valeurs positives $f(x)$ telle que

$$\text{Prob}(x \leq X < x+dx) = f(x) dx$$

$f(x)$ est la densité de probabilité

La fonction de répartition vaut alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (\text{borne inférieure } -\infty)$$

Espérance mathématique, moments

→ Espérance mathématique d'une variable aléatoire X $(-\infty, +\infty)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{souvent notée } \mu, \text{ } \nu, \text{ valeur moyenne}$$

→ Espérance mathématique d'une fonction $\varphi(X)$:

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

Cas particulier $\varphi(x) = ax$

$$\boxed{E(aX) = a E(X)}$$

→ Si $\varphi(x) = x^r$ (r entier > 1 , on obtient le moment d'ordre r , par rapport à l'origine, souvent noté μ'_r .

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx = \mu'_r \quad \text{cas part. } E(X) = \mu'_1 (\mu)$$

Si on prend comme origine la moyenne μ , on définit le moment par rapport à la variable centrée (ou moment centré)

$$E[(X-\mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x) dx = \mu_r \quad \text{cas part } \mu_1 = 0$$

→ Variance de X c'est le moment centré d'ordre 2 : μ_2

$$\mu_2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \sigma^2 \text{ (variance)}$$

la valeur moyenne de $(x-\mu)^2$ est une manière (parmi d'autres) de mesurer la dispersion de la variable X

autour de μ . $\sigma = \sqrt{\mu_2}$ est l'écart type.

On montre facilement que :

$$\rightarrow \text{var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu'_2 - \mu^2$$

$$\rightarrow \text{var}(aX) = a^2 \times \text{var}(X)$$

$$\rightarrow \text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \quad \text{si les variables sont indépendantes}$$

→ Covariance de deux variables aléatoires X et Y

C'est l'espérance mathématique du produit des variables centrées

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X-\mu)(Y-\nu)]$$

Si les deux variables sont indépendantes, leur covariance est nulle

Loi de Laplace-Gauss ou loi normale

La densité de probabilité est $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Lorsque la variable X dépend d'un grand nombre de paramètres indépendants, elle suit une loi normale (dispersion des résultats) on le note $X, N(\mu, \sigma)$

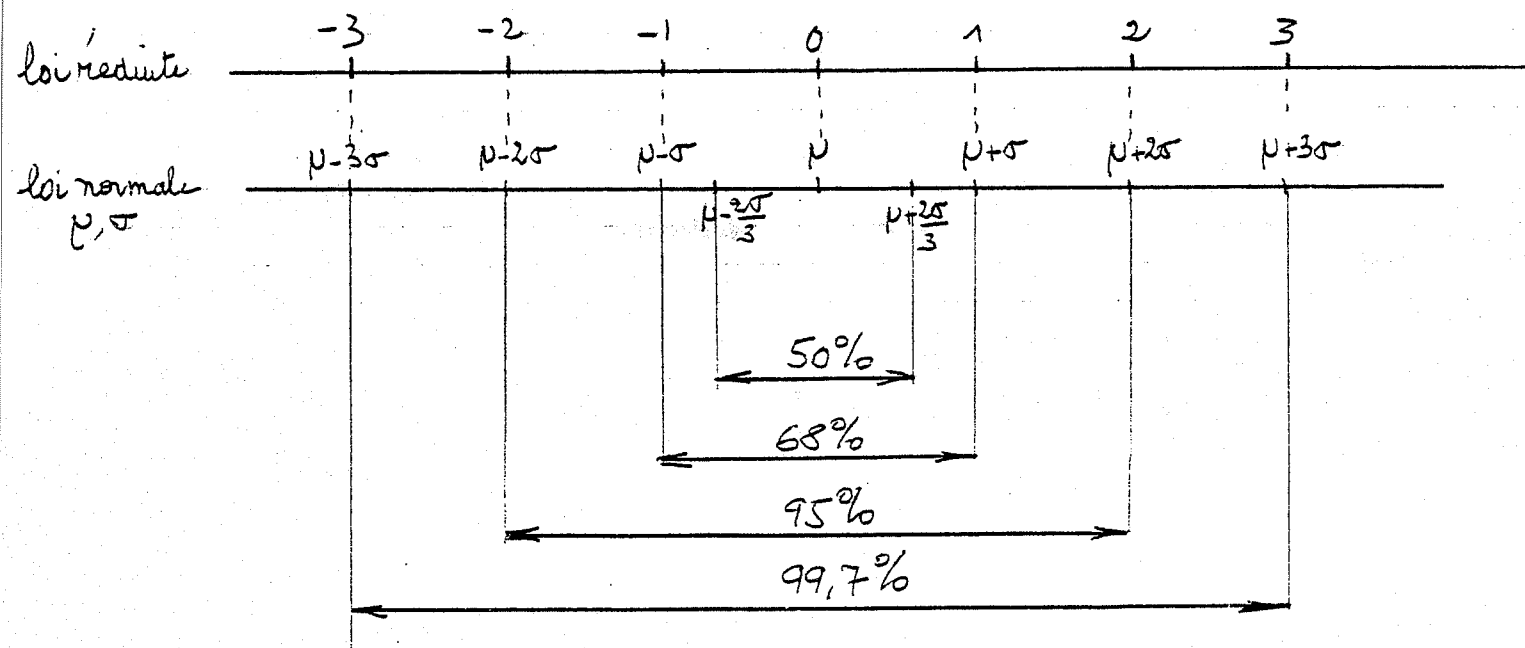
valeur moyenne : μ écart type : σ

si $\mu = 0$ la loi est centrée

si $\mu = 0, \sigma = 1$ la loi est centrée réduite

$\frac{x-\mu}{\sigma}$ est la variable réduite

Répartition autour de la moyenne



$\sigma \downarrow$: courbe très pointue } σ mesure la dispersion
 $\sigma \uparrow$: — — aplatie } autour de la moyenne