Transformées de Fourier

1) Transformée de Fourier à 1 dimension

Soit f(x) une fonction sommable (si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ est finie), la transformée de Fourier de f(x), F(u), vaut:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi jux} dx \equiv \langle u|f\rangle$$

où u et x sont des variables conjuguées (duales, réciproques). Le produit ux est sans dimension, par exemple:

- si x est un temps, u est une fréquence
- si x est une longueur, u est la fréquence spatiale

2) propriétés:

• Changement de signe, symétrie/antisymétrie:

Soit $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi jux} dx$,

Alors $F(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi j(-u)x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi jux} dx$

en prenant y=-x, dy=-dx, ∞→-∞:

F(-u)= $-\int_{\infty}^{-\infty} f(-y) e^{-2\pi juy} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y) e^{-2\pi juy} dy$

F(-u) = TF(f(-x))

On aurait pu écrire F(u)= $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-2\pi ux)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-2\pi ux)dx$ = α+iβ

et F(-u)= $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx$ =α-iβ

soit, * pour f(x) réelle dissymétrique (f(x)≠f(-x)):

TF(f(x))=F(u)= α+iβ

TF(f(-x))=F(-u)= α-iβ=F^*(u), F(u) est complexe

* pour f(x) réelle symétrique (f(x)=f(-x)):

TF(f(x))=F(u) = TF(f(-x))=F(-u) ⇒ α+iβ=α−iβ

⇒ β=0, F(u) est réelle pure

* pour f(x) réelle antisymétrique (f(x)=-f(-x)):

TF(f(x))=F(u) = -TF(f(-x))=-F(-u) ⇒ α+iβ=−α+iβ

⇒ α=0, F(u) est imaginaire pure

• Distributivité:

TF(αf(x) + βg(x)) = αF(u) + βG(u)

• Translation:

$$TF(f(x-x_0)) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-2\pi jux}dx$$

Posons $t=x-x_0 \Rightarrow x=t+x_0$

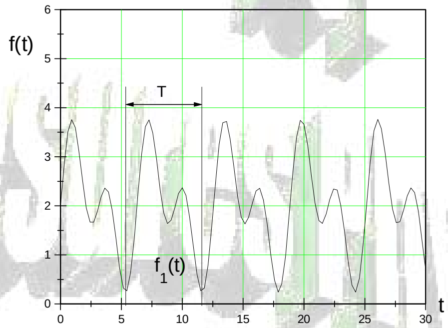
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ju(t+x_0)}d(t+x_0)$$

$d(t+x_0)=dt$ (x_0=cte) $\Rightarrow$

$$= e^{-2\pi jux_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ju(t)}d(t)$$

$$= e^{-2\pi jux_0} F(u)$$

• fonction périodique $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f_1(t-nT)$



$$TF(f(t))=F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\nu t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} f_1(t-nT)e^{-2\pi j\nu t}dt = \sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-nT)e^{-2\pi j\nu t}dt$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} F_1(\nu)e^{-2\pi j\nu nT} = F_1(\nu)\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j\nu nT}$$

$$= F_1(\nu)\left[\sum_{-\infty}^{0} e^{-2\pi j\nu nT} + \sum_{0}^{\infty} e^{-2\pi j\nu nT}\right] = F_1(\nu)\left[\sum_{0}^{\infty} e^{2\pi j\nu nT} + \sum_{0}^{\infty} e^{-2\pi j\nu nT}\right]$$

$$= 2F_1(\nu)\sum_{0}^{\infty}\cos(2\pi\nu nT) = 2F_1(\nu)Re\sum_{0}^{\infty} e^{-2\pi j\nu nT}$$

soit S $=\sum_{0}^{N-1} e^{-2\pi j\nu nT}$

$=1 + e^{-2\pi j\nu T} + \ldots + e^{-2\pi j\nu(N-1)T}$ (a)

$\Rightarrow$ $S\,e^{-2\pi j\nu T}$ $= e^{-2\pi j\nu T} + \ldots + e^{-2\pi j\nu NT}$ (b)

(a)-(b): $S(1-e^{-2\pi j\nu T})$ $=1-e^{-2\pi j\nu NT}$

S $=(1-e^{-2\pi j\nu NT})/(1-e^{-2\pi j\nu T})$

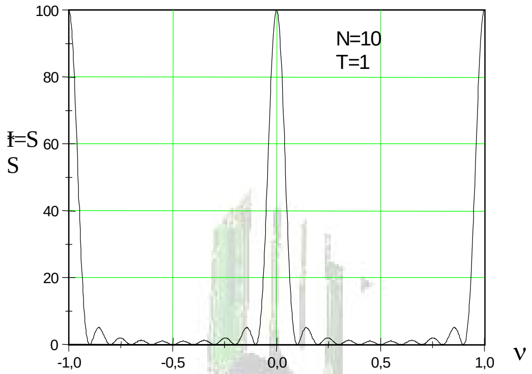
$$= \frac{e^{-\pi j\nu NT}(e^{\pi j\nu NT} - e^{-\pi j\nu NT})}{e^{-\pi j\nu T}(e^{\pi j\nu T} - e^{-\pi j\nu NT})}$$

$$= e^{-\pi j\nu(N-1)T}\,\frac{\sin(\pi\nu NT)}{\sin(\pi\nu T)}$$

$$\text{soit I=SS}^{*}=\frac{\sin^2(\pi\nu NT)}{\sin^2(\pi\nu T)}$$

Cette fonction prend la valeur N lorsque son dénominateur s'annule (tous les ν=n/T), et s'annule lorsque son numérateur s'annule (tous les ν=/NT):

Lorsque N tend vers l'infini, alors la fonction I peut être vue comme une somme de



fonctions de Dirac:

$$\lim_{N\to\infty} I = \lim_{N\to\infty} F^2(\nu) = 4F_1^2(\nu)\sum_0^N \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

• Multiplication:

$$\text{TF(f(ax)) = F(u)} \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-2\pi jux}dx$$

Posons t=ax ⇒ x=t/a ⇒ dx=dt/a

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ju\frac{t}{a}}dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a}\right) & \text{si a > 0} \\ -\frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a}\right) & \text{si a < 0} \end{cases} \qquad \text{(Figure 1)}$$

Cette propriété des transformées de Fourier est bien illustrée par le principe d'indétermination de Heisenberg, ΔEΔt>h.

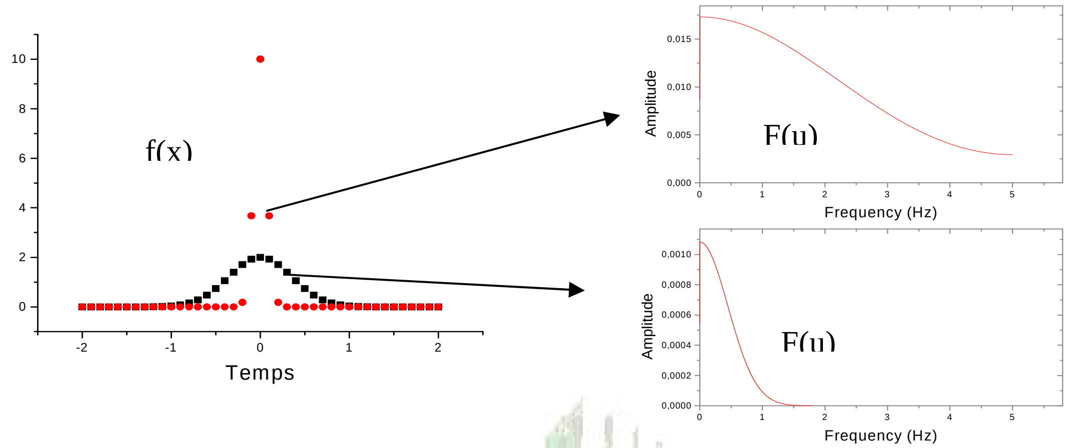


Figure 1

- Complexe conjugué:

$$\mathrm{TF}(f^*(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-2\pi jux} dx$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi jux} dx \right]^*$$

$$= F^*(-u)$$

$\Rightarrow$ si $F^*(-u)=F(u)$, alors f(x) est réelle ($f^*(x)=f(x)$).

- Dérivée de F(u):

$$\frac{dF(u)}{du} = \lim_{h\to 0} \frac{F(u+h)-F(u)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[e^{-2\pi j(u+h)x} - e^{-2\pi jux} \right] dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[e^{-2\pi jhx} - 1 \right] e^{-2\pi jux} dx \qquad \lim_{h\to 0} \left[e^{-2\pi jhx} - 1 \right] \to -2\pi jhx$$

$$= -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-2\pi jux} dx$$

$$= -2\pi j \, \mathrm{TF}(xf(x))$$

- TF de la dérivée:

$$\mathrm{TF}\left(\frac{df}{dx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} e^{-2\pi jux} dx$$

On pose $v = e^{-2\pi jux}$ et $dw = \frac{df}{dx}$, puis on intègre par parties:

$$= \left[f(x) e^{2\pi jux} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi ju f(x) e^{-2\pi jux} dx$$

$$= 2\pi ju \, F(u),$$

et par suite TF($\dfrac{d^n f}{dx^n}$) = $(2\pi ju)^n$ F(u)

• Multiplication par un polynôme:

vu la dérivée de F(u), on a:

$$\text{TF(xf(x))}= \left[\frac{-1}{2\pi j}\right]\frac{dF(u)}{du}$$

Et par suite:

$$\text{TF}(x^n f(x)) = \left[\frac{-1}{2\pi j}\right]^n \frac{d^n F(u)}{du^n}$$

• Inversion de Fourier (réciprocité de la TF):

Si F(u)=TF(f(x)), alors f(x)=TF^{-1}(x)=TF(F(u)),

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi jux}du$$

donc F(u) est aussi une fonction sommable.

Démonstration: soit R(x) la fonction représentant la fonction recherchée:

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi jux}du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,e^{-2\pi jux'}dx'\,e^{2\pi jux}du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ju(x-x')}du \end{aligned}$$

en ce qui concerne $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ju(x-x')}du$: cette intégrale est nulle partout sauf en x'=x où elle prend la valeur $\int_{-\infty}^{\infty} du$ =∞. Cherchons sa valeur principale I_U(x-x'):

$$I_U(x-x')= \int_{-U}^{U} e^{2\pi ju(x-x')}du = \frac{1}{2\pi j(x-x')}\left(e^{2\pi jU(x-x')} - e^{-2\pi jU(x-x')}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(2\pi U(x-x')\right)}{\pi(x-x')}$$

La fonction I_U(x-x') est représentée sur la Figure 2 pour 2 valeurs de U.

On voit que, ∀ U, $\int_x I_U(x-x')d(x-x')$ =1, en effet cette intégrale se rapproche de plus en plus de la surface du triangle abc (Figure 2) quand U devient grand, et elle vaut 2U.(1/2U)=1. Lorsque la valeur 1/2U tend vers 0, quand U→∞, on obtient la valeur de la fonction R(x) recherchée. En fait, quand U→∞, I_U(x-x') est la distribution de Dirac, δ(x-x'), et l'on a:

$$\begin{aligned} R(x) &= \lim_{U\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') I_U(x-x')dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx' \\ &= f(x) \quad \text{(CQFD)} \end{aligned}$$

• Produit de convolution:

on a R(x) de la forme: $R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g_U(x'-x)dx'$

$= f\otimes g$ (produit de convolution)

où $\lim_{U\to\infty} g_U(x-x') = \delta(x'-x)$

avec $\delta(x'-x) = \begin{cases} \infty \text{ si } x' = x \\ 0 \text{ si } x' \neq x \end{cases}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x'-x)dx' = 1$

On voit que le produit de convolution est une moyenne pondérée.

Mais la fonction de Dirac ne se conçoit comme une fonction 'normale' (dérivable, …) qu'à l'intérieur du produit de convolution f⊗g:

$$(f\otimes g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x'-x)dx'$$

il faudra s'en rappeler pour des applications pratiques. Par exemple, on pourra convoluer une fonction f(t) par une fonction Créneau (normalisée, Figure 3), Cr(t):

$$Cr_\tau \otimes f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Cr(t-t_0) f(t)dxt = \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0+\frac{\tau}{2}} f(t)dt$$

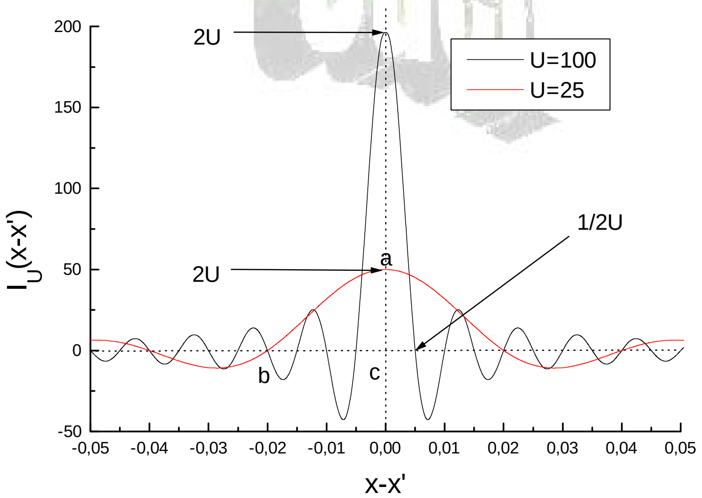


Figure 2

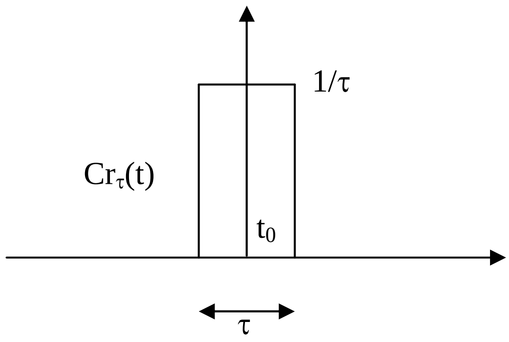


Figure 3

- TF du produit de convolution:

$$\begin{aligned}
\text{TF(R(x))} &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-2\pi j u x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x'-x) e^{-2\pi j u x} dx dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x'-x) e^{-2\pi j u (x-x'+x')} dx dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-2\pi j u x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(x'-x) e^{-2\pi j u (x-x')} d(x-x') \\
&= \text{F(u) G(-u)}
\end{aligned}$$

alors, si g(x) réelle, $\text{TF}(f \otimes g) = F(u)\, G^*(u)$

3) Généralisation à plusieurs dimensions:

Si f(x,y,x,t), alors:

$$F(u,v,w,\nu) = \iiiint f(x,y,z,t) e^{-2\pi j(\nu t - ux - vy - wz)} dx dy dz dt$$

on peut alors définir le vecteur d'onde $\vec{k} = 2\pi \left| \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right.$, où u, v et w sont appelées fréquences spatiales. Ainsi on peut réécrire F(u,v,w,n):

$$F(\mathbf{k},\omega) = \iiiint f(\mathbf{r},t) e^{-j(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} d^3\mathbf{r} dt$$

et par inversion:

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiiint F(\mathbf{k},\omega) e^{j(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} d^3\mathbf{k} d\omega$$

4) Exemples d'utilisation:

• Soit un circuit électronique comprenant un amplificateur opérationnel de gain A (Figure 4):

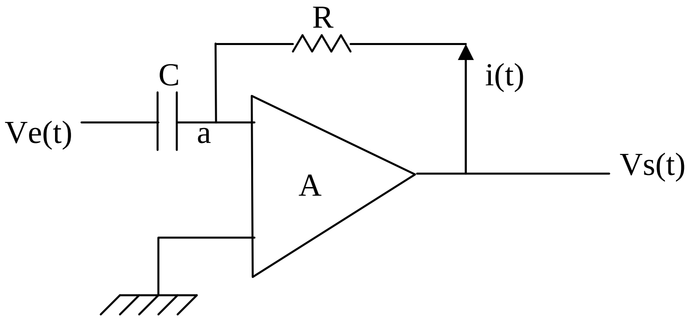


Figure 4

Le courant passant dans R à l'instant t est: i(t)=(Vs-Va)/R, et i(t)=Cd(Va-Ve)/dt, soit encore: i(t)/C=(Vs-Va)/RC. Le gain de l'amplificateur étant A, on a Vs=-AVa à tout instant, ce qui conduit à l'expression:

$$\mathrm{Vs}\left(1+\frac{1}{A}\right)/\mathrm{RC}=-\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ve}+\frac{Vs}{A}\right)$$

$$\frac{dVs}{dt}+\frac{A}{RC}\mathrm{Vs}=-\mathrm{A}\frac{dVe}{dt}$$ d'où l'on obtient Vs(t)

Pour connaître l'état du circuit à la fréquence ν, on peut alors prendre la TF de chacun des membres de l'équation précédente, soit:

$$2\pi j\nu \mathrm{Vs}(\nu) + \frac{A}{RC}\mathrm{Vs}(\nu) = -2\pi j\nu \mathrm{A}\mathrm{Ve}(\nu)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Vs(\nu)}{Ve(\nu)}=\frac{-2\pi j\nu A}{2\pi j\nu+\dfrac{A}{RC}}$$

$$\mathrm{Vs}(\nu)=\mathrm{T}(\nu)\mathrm{Ve}(\nu) \Rightarrow \mathrm{Vs}(t)=\mathrm{A}(t)\otimes\mathrm{Ve}(t)$$

Il faut maintenant donner un sens à A(t). Par exemple, si Ve(t)=δ(t) (pulse électrique), on a alors: TF(Ve(t))=TF(δ(t))=Ve(ν)= $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-2\pi j\nu t}dt$ =1, et par suite Vs(ν)=T(ν), donc:

$$\mathrm{A}(t)=\mathrm{TF}^{-1}(\mathrm{T}(\nu))$$

• Onde électromagnétique monochromatique:

Si f(x,y,z,t) représente une onde électromagnétique monochromatique, on peut toujours la mettre sous la forme:

$$\mathrm{f(x,y,z,t)=f(x,y,z)}\ e^{2\pi j\nu_0 t}$$, et sa TF devient

$$F(u,v,w,\nu)=\iiint f(x,y,z)e^{2\pi j(ux+vy+wz)}dxdydz\int e^{-2\pi j(\nu-\nu_0)t}dt$$

$$F(u,v,w,\nu)=\iiint f(x,y,z)e^{2\pi j(ux+vy+wz)}dxdydz\ \delta(\nu-\nu_0)$$

pour $\nu=\nu_0$, on obtient la répartition spatiale de l'onde par inversion de Fourier:

$$f_1(x,y,z)=\iiint F(u,v,w)e^{-2\pi j(ux+vy+wz)}dudvdw$$

soit avec: $|\mathbf{k}|=2\pi\nu_0/c=2\pi(u^2+v^2+w^2)^{1/2}$

$$\left(\frac{\nu_0}{c}\right)^2=u^2+v^2+w^2=cte$$

cette équation définie la sphère d'Ewald, lieu (surface) des points correspondants aux extrémités des vecteurs $\mathbf{k}(\nu_0)$.