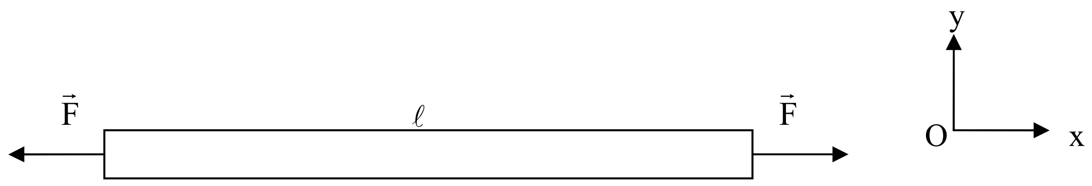
TD MECANIQUE N°9

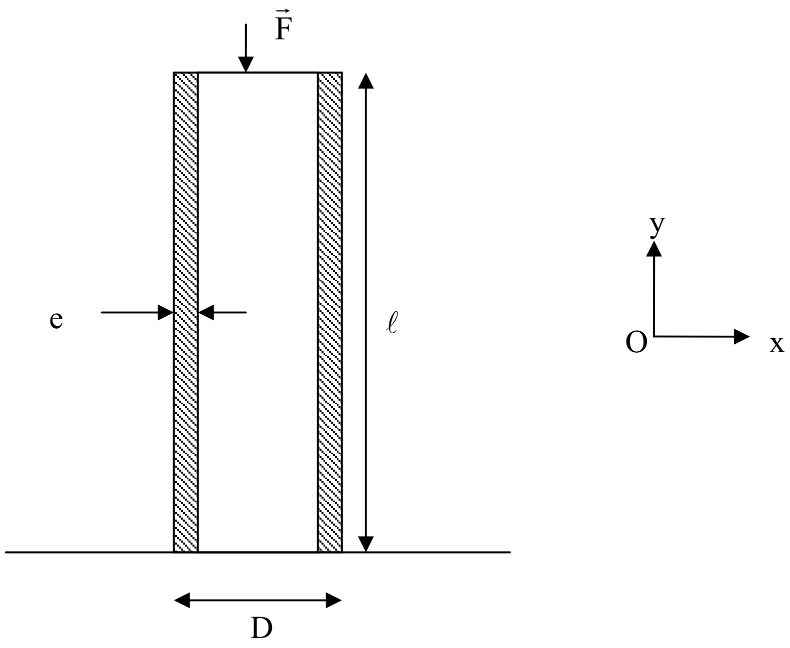
RESISTANCE DES MATERIAUX

-1- Traction simple



Une barre rectiligne de section circulaire S de diamètre d et de longueur ℓ est soummise à chacune de ses extrémités à une sollicitation $\vec{F}$. On désire trouver le diamètre minimum à utiliser pour que la barre résiste aux sollicitations, ainsi que l'allongement $\Delta\ell$ qui en résulte.
On donne $F = 2000$ N; $\ell = 2$ m, $R_e = 36$ daN/mm^2, $E = 2.10^5$ N/mm^2. Le coefficient de sécurité à utiliser pour cette construction est $s = 3$.

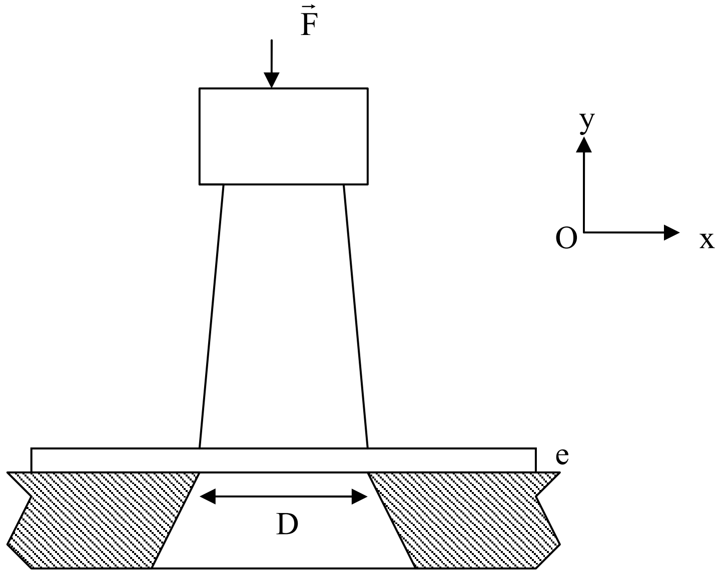
-2- Compression simple



Un poteau tubulaire de diamètre extérieur D, de hauteur ℓ et d'épaisseur e, repose sur le sol et est soumis à une sollicitation $\vec{F}$.
On donne $F = 10^5$ N; $\ell = 3$ m, $R_e = 16$ daN/mm^2, $E = 1.5\ 10^5$ N/mm^2. Le coefficient de sécurité à utiliser pour cette construction est $s = 8$.
21- Calculer la surface S_{min} de section droite du poteau minimale pour la tenue à l'effort de compression, puis l'écrasement $\Delta\ell$ correspondant.
22- Calculer le diamètre intérieur du cylindre, d, pour respecter la condition de non-flambage du poteau.

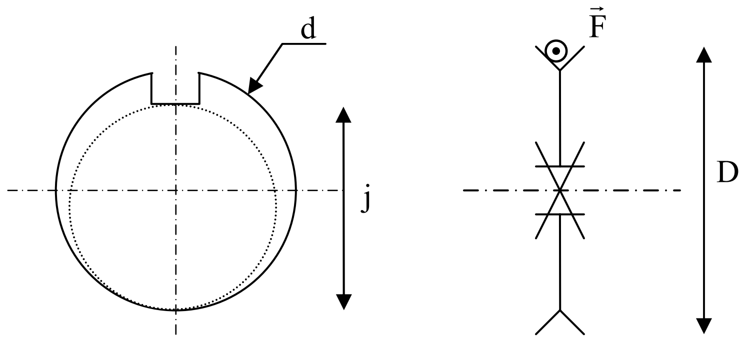
Noelle.chevalier@unicaen.fr daniel.chateigner@ensicaen.fr

-3- Cisaillement simple



On cherche à poinçonner un carré de côté a dans une pièce d'épaisseur e et de résistance à la rupture au glissement R_{rg}.
On donne e = 4 mm; a = 15 mm, R_{rg} = 200 N/mm^2.
31- Calculer l'effort minimal de poinçonnage à appliquer pour découper la pièce.
32- Quel doit être la résistance élastique minimum du poinçon si on adopte un coefficient de sécurité s=2 ?

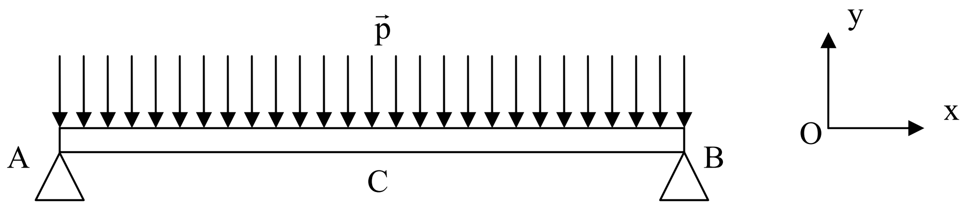
-4- Torsion simple



Un arbre de transmission de diamètre d (figure de gauche) possède une rainure de clavetage, afin de transmettre l'effort F d'une poulie (droite) de diamètre D. L'acier constituant l'arbre possède une limite élastique R_{eg} = 360 N/mm^2.
On donne D = 200 mm, F = 1500 N. D'autre part, pour les dimensions considérées, la norme en vigueur pour le clavetage impose d – j = 3.5.
Calculer le diamètre minimum d de l'arbre de transmission pour transférer F sans endommagement, en prenant un facteur de sécurité de 2. La présence de la rainure de clavetage impose un coefficient de concentration de contraintes k=1.5.

-5- Flexion simple – poutre soumise à son propre poids

On considère une poutre en acier reposant sur deux appuis simples sans frottement, situés respectivement en A et B. Le plan (xAy) est un plan de symétrie pour la poutre et pour les charges qui lui sont appliquées. Le point B est situé sur (Ax) et C est le milieu de AB. La poutre est de longueur L et a une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h. Elle est uniquement soumise à l'action de la pesanteur assimilée à une charge uniformément répartie entre A et B et modélisable par une densité linéique de force: $\vec{P} = -p\vec{e}_y$.



L'acier de la poutre a les caractéristiques mécaniques suivantes: $E = 2.10^5$ MPa et $R_e = 320$ MPa. On donne le moment quadratique de la poutre: $I_{Gz} = bh^3/12$ et son moment statique: $W_{Gz} = bh^2/2$.

51- Déterminer le torseur statique des actions mécaniques de liaison en A et B.

52- Donner l'expression du torseur de cohésion dans une section droite (S) de centre de surface G repéré par on abscisse x. En déduire les diagrammes de l'effort tranchant T_y et du moment fléchissant M_{fz} le long de la poutre. Déterminer la valeur et la position de $T_{y,max}$ et $M_{fz,max}$.

53- Décrire les contraintes. Donner leur expression dans une section droite (S) et leur valeur maximale.

54- Déterminer l'équation y(x) de la déformée et en déduire la valeur de la flèche y_C au centre de la poutre.

55- Application numérique: $\rho = 10$ kg/dm^3 (densité de l'acier), L = 1 m, b = 10 cm et h = 1 cm. (Il faudra d'abord calculer la répartition linéique de charge p, en N/mm).

56- Comparer la valeur obtenue avec la flèche générée par une masse ponctuelle de 100g appliquée en C. Conclusion.

-1- Traction simple

Il nous faut tout d'abord calculer la limite élastique pratique à la traction, compte tenu du coefficient de sécurité imposé:

$R_{pe} = R_e / s = 36/3 = 12$ daN/mm^2,

puis la contrainte de traction appliquée à la barre:

$\sigma = N / S = F / (\pi d^2/4)$.

D'où

$d = (2000.4/120/\pi)^{1/2} = 4.61$ mm

La condition de résistance en traction impose alors:

$\sigma < R_{pe}$ $\Rightarrow$ **d > 4.61 mm** pour que la barre résiste

D'autre part, la loi de Hooke impose:

$\sigma = E\Delta\ell/\ell$ $\Rightarrow$ $N/S = E\Delta\ell/\ell$, et donc, avec **d = 4.61 mm**:

$\boldsymbol{\Delta\ell} = N\ell/SE = 2000.2.10^3/[(\pi.4.61^2/4).2.10^5] =$ **1.2 mm**

-2- Compression simple

21- La surface de la section droite du tube est:

$S = \pi D^2/4 - \pi(D\text{-}e)^2/4$

Cette surface doit être telle que:

$N/S_{min} < R_e/s$, soit

$\mathbf{S_{min}} = 8.10^5 / 160 =$ **5000 mm²**

D'autre part, comme:

$N/S_{min} = E\Delta\ell/\ell$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta\ell} = N\ell/S_{min}E = 3000\ 10^5/[5000\ 1.5\ 10^5] =$ **0.4 mm**

22- Pour ne pas avoir flambage, il faut respecter:

$\ell < 8D$, soit **D > 0.375 m**

Comme $S = \pi D^2/4 - \pi(D\text{-}e)^2/4 = \pi D^2/4 - \pi d^2/4$,

On a $D^2 - d^2 > 4S/\pi$

$d^2 < D^2\text{-}4S/\pi$

$\mathbf{d} < (D^2\text{-}4S/\pi)^{1/2} =$ **0.366 m**

-3- Cisaillement simple

31- La surface à cisailler est:

$S = 4a\ e$

Cette surface doit être telle que:

$N/S > R_{rg}$ pour découpage, soit

$\mathbf{N} > S\ R_{rg} = 200S =$ **48 kN**

32- Le poinçon doit fournir l'effort N précédent tout en résistant mécaniquement, soit:

$N/S < R_e/s$

Ici $S = a^2$ est la surface de la section droite du poinçon à l'endroit de l'effort.

Il vient:

$48000 / 15^2 < R_e/2$

et donc **Re > 427 N/mm²**

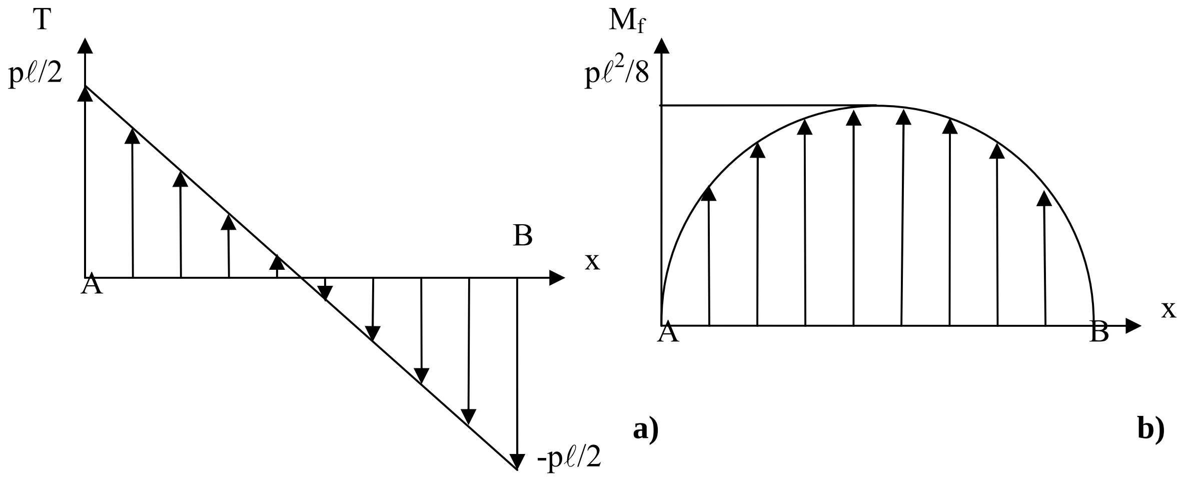
-4- Torsion simple

La résistance élastique au glissement pratique, compte tenu du coefficient de concentration de contraintes vaut:
$R_{pg}=R_{eg}/k = 240\ N/mm^2$
Le moment de torsion M_t appliqué par la force F vaut:
$M_t = FD/2 = 200.1500/2 = 1.5\ 10^5$ Nmm
D'après les résultats de RdM en torsion simple la condition de résistance s'exprime par:
$M_t/(I_0/R) < R_{eg}/ks$
Avec pour un cylindre plein: $I_0\ /R = \pi j^3/16$, soit:
$16M_t/\pi j^3 < R_{eg}/ks$
$j > (16M_tks/\pi R_{eg})^{1/3} = 18.5$ mm
Vu la norme pour l'utilisation de clavettes: $d – 3.5 > 18.5 \Rightarrow$ **d > 22 mm**

-5- Flexion simple

51- On cherche l'équilibre statique de la poutre. En A et B sont présents des appuis simples, il n'y a donc pas de composante de moments. Le torseur statique s'équilibre donc seulement sur les réactions aux appuis A et B, avec R_A et R_B respectivement, et la résultante des forces extérieures vaut:
$R(F_{ext\rightarrow\ poutre})=0$ sur l'axe 0y uniquement, soit
$R_A + R_B + \int pdx = 0$ avec p=constante et uniquement sur Oy
$R_A + R_B + p\int dx = 0$ intégrale de 0 à L
$R_A + R_B = pL$ et $R_A = R_B$
$\Rightarrow$ $R_A = R_B = Lp/2$

52- L'équation $-p(x) = \dfrac{dT(x)}{dx}$ nous donne
$T = -px + cte$
comme en $x = 0$ on a $T = pL/2$, $cte = pL/2$
On a donc $T = pL/2 – px$
D'autre part $T(x) = \dfrac{dM_f(x)}{dx}$ nous donne
$M_f(x) = pLx/2 – px^2/2 + cte$
comme en x=0, $M_f = 0$, la constante s'annule et
$M_f(x) = pLx/2 – px^2/2$. C'est l'équation d'une parabole. On remarque que $T = 0$ pour $x = L/2$, donc $M_f(x)$ passe par un optimum en ce point qui vaut $M_f(x) = pL^2/8$. C'est donc un maximum. En $x = L$, $M_f(x) = 0$.



a) **b)**

53- La contrainte tangentielle de flexion s'exprime par $\tau = \frac{T_y W_{Gz}}{z I_{Gz}}$ soit une contrainte tangentielle de flexion maximum (en z_{max} = b/2, x = 0 ou L, T_y = pL/2): $\tau_{max} = \frac{2.12pLbh^2}{2b^2h^3 2} = \frac{6pL}{bh}$ aux bords de la poutre

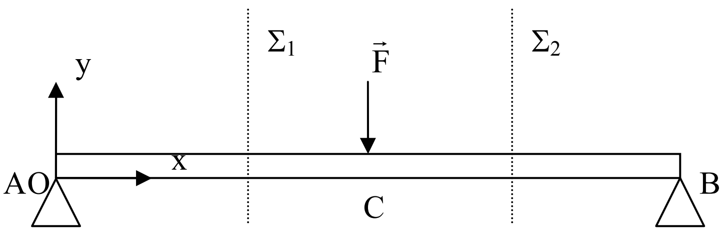
W_{Gz}: moment statique et I_{Gz} moment quadratique de S.

La contrainte normale de flexion s'exprime par: $\sigma = \frac{yM_f}{I_{Gz}}$ soit une contrainte normale de flexion maximum (en $y_{max} = h/2$, x=L/2 et $M_{fz} = pL^2/8$): $\sigma_{max} = \frac{3pL^2}{4bh^2}$ au milieu de la poutre.

54- E I_{GZ} y" = M_{fz} avec
$Mf(x) = pLx/2 – px^2/2$
En intégrant 2x: Déformée $y(x) = p/2(Lx^3/6 – x^4/12) + Ax + B$
Conditions aux limites: pas de déformation aux appuis: B=0 et $A = – pL^3/24$
Flèche maxi au centre de la poutre: $y_C = y(x=L/2) = -5pL^4/384E\, I_{Gz}$

55- densité linéïque de charge: p = 0.1 N/mm, $|\sigma_{max}|$ = 7.5 MPa, y_C = 0.78 mm

56-



Dans ce cas l'équation statique nous donne rapidement les réactions aux appuis $R_A = R_B = F/2$

Il faut alors regarder les moments de flexion dans les deux tronçons AC et CB:

Tronçon AB (section droite Σ_1): $0 \leq x \leq L/2$

$M_{f1} = -R_A x = -xF/2$

(le signe – provient du fait que R_A tend à faire tourner la section droite en sens indirect)

$\Rightarrow \quad EI_{GZ}y'_1 = -Fx^2/4 + C_1$

$\Rightarrow \quad EI_{GZ}y_1 = -Fx^3/12 + C_1x + C_2$

Tronçon CB (section droite Σ_2): $L/2 \leq x \leq L$

$M_{f2} = -R_A x + F(x-L/2) = -xF/2 + F(x-L/2) = Fx/2 - FL/2$

$\Rightarrow \quad EI_{GZ}y'_2 = Fx^2/4 - FLx/2 + C_3$

$\Rightarrow \quad EI_{GZ}y_2 = Fx^3/12 - FLx^2/4 + C_3x + C_4$

Détermination des constantes C_i:

en $x=0$, $y_1=0$ $\Rightarrow$ $C_2=0$

en $x=L$, $y_2=0$ $\Rightarrow$ $0 = FL^3/12 - FL^3/4 + C_3L + C_4$ ❶

en $x=L/2$: $y_1=y_2$ $\Rightarrow$ $FL^3/96 - FL^3/16 + C_3L/2 + C_4 = -FL^3/96 + C_1L/2$ ❷

$y'_1=y'_2$ $\Rightarrow$ $-FL^2/16 + C_1 = FL^2/16 - FL^2/4 + C_3$ ❸

Nous obtenons un système de 3 equations et 3 inconnues.

❶ $\Rightarrow$ $C_4 = - FL^3/12 + FL^3/4 - C_3L$

❷ $\Rightarrow$ $FL^3/96 - FL^3/16 + C_3L/2 + FL^3/6 - C_3L = -FL^3/96 + C_1L/2$

soit $C_3 = FL^2/4 - C_1$

❸ $\Rightarrow$ $-FL^2/16 + C_1 = FL^2/16 - FL^2/4 + FL^2/4 - C_1$

soit $C_1 = FL^2/16$

et $C_3 = 3FL^2/16$

$C_4 = -FL^3/48$

Et donc: $y_1(x=L/2) = y_C$ $= (-FL^3/96 + FL^3/32)/E\,I_{Gz}$

$= FL^3/48E\,I_{Gz}$

$= (1\ 1^3) / (48\ 2.10^5.10^3\ (0.01\ 0.1^3/12)) = 0.125$ mm

La déformation dûe au poids n'est pas négligeable devant une charge aussi petite !

On aurait pu prendre:

$y_2(x=L/2) = y_C$ $= (FL^3/96 - FL^3/16 + 3FL^3/32 + -FL^3/48)/E\,I_{Gz}$

$= FL^3/48E\,I_{Gz}$

Attention, on obtient une valeur positive pour y_C, alors que la flèche de la poutre est forcément vers –Oy. Il faut remarquer que l'Eq 36 du cours à été établie avec $dx=G_1G_2$, alors que lorsqu'on isole la section dans cet exercice, on regarde l'effet des efforts à gauche de la section droite. On devrait utiliser $M_f = -EI_{Gz}y''$ au lieu de $M_f = EI_{Gz}y''$, ce qui inversera le signe de y_C.

Noelle.chevalier@unicaen.fr daniel.chateigner@ensicaen.fr