

Mécanique

Questions de cours (1h maximum - 6 points)

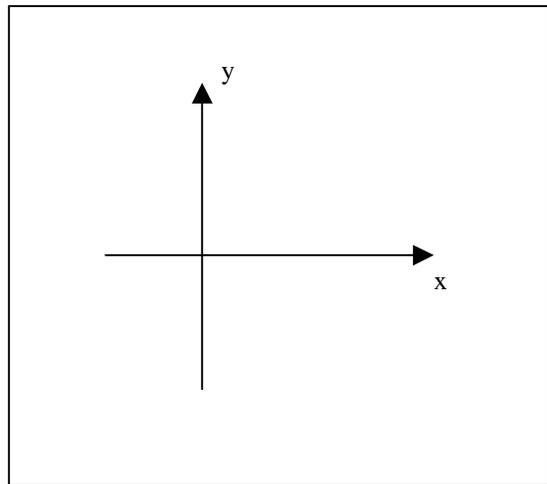
(Documents et Calculatrices non autorisés. Réponses attendues sur la feuille-sujet, seuls les résultats seront donnés. Si une justification est demandée, elle doit être succincte)

1: Comment s'exprime le vecteur position du point M, $\vec{OM}(r,\theta)$, en coordonnées cartésiennes:

Dessiner le vecteur $\frac{d\vec{OM}}{d\theta}$ et donner son expression en coordonnées cartésiennes:

Exprimer \vec{e}_r , \vec{e}_θ , $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ puis $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$

en coordonnées cartésiennes. Retrouver alors l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)$ et de l'accélération $\vec{a}(M)$ en coordonnées polaires.



2: Comment peut-on calculer le vecteur vitesse de rotation d'un solide, $\vec{\Omega}$, connaissant la différence de vitesse entre deux de ses points ?

Si $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_k$ du repère cylindrique, quelle relation existe-t-il entre les vitesses \vec{v}_A et \vec{v}_B de deux points $A(r_A, \theta_A)$ et $B(r_B, \theta_B)$ du solide ?

3: Énoncer les théorèmes permettant de calculer de façon simple le centre de masse de solides homogènes de forme géométrique simple. Peut-on les utiliser dans le cas d'un 3/4 de cerceau filiforme ou 3/4 de disque ? Justifier.

Est-il possible de calculer le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène par rapport à un axe perpendiculaire à son axe de révolution en utilisant le théorème de Huygens si l'on connaît celui par rapport à son axe de révolution ? Justifier.

4:

- Dans un système de points matériels de résultante de forces et de résultante de moments tous deux nuls, les forces n'ont aucune action. Vrai Faux

- Pour deux solides en contact, le coefficient de frottement statique est toujours supérieur au coefficient de frottement cinétique. Vrai Faux

- Je me promène à vitesse constante dans un référentiel Galiléen, G1. Sur ma personne est attaché un référentiel G2. G2 est Galiléen aussi. Vrai Faux

- Pour qu'un solide soumis à un système de forces coplanaires soit en équilibre statique, il faut et il suffit que les forces soient concourantes. Vrai Faux

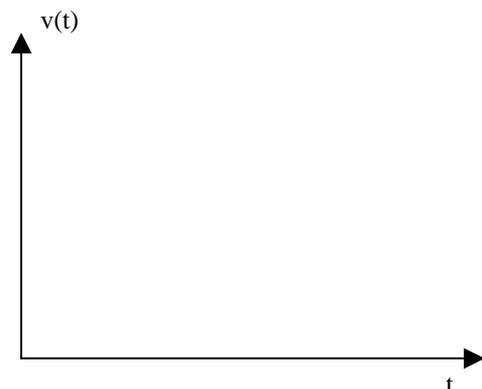
5: La trajectoire selon l'axe Ox d'un hors-bord soumis à la force de frottement de l'eau peut s'exprimer par:

$$x(t) = (m F / \alpha^2) \exp(-\alpha t / m) + (F / \alpha) t + x_0$$

F: force développée par le bateau. α : coefficient de frottement. m: masse du bateau.

Exprimer la vitesse $v(t)$ du hors-bord, représentation graphique.

Que représente la valeur F/α ?



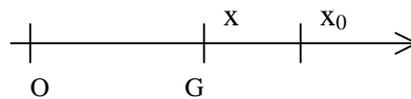
Mécanique

Exercices (2h - 14 points)

(Documents et Calculatrices autorisés. Réponses concises désirées. Les exercices 1, 21, 22 et 3 sont indépendants)

1: Marteau à activation magnétique

Un marteau de centre de gravité G, de masse m, initialement au repos en x_0 , est mis en mouvement de translation pure par un aimant localisé en O. Le solide se déplace en ligne droite selon l'axe Ox. Il est accéléré par la force magnétique, selon la relation $a(x) = -k / x^2$. La valeur de k est positive. On désignera par x l'abscisse de G.



Exprimer les relations liant accélération, vitesse et trajectoire du solide.

En substituant le temps dans ces expressions, trouver la relation qui lie la vitesse $v(x)$ du solide à k, x et x_0 .

Une pièce à emboutir est placée à $x = 10$ cm. L'énergie nécessaire à l'emboutissage de cette pièce est de 5000 J. De quelle distance x_0 doit partir le marteau ?

On donne: $k = 100 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$, $m = 10 \text{ kg}$

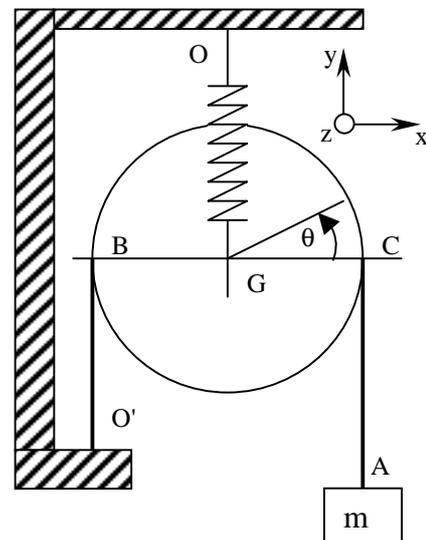
2: Poulie d'amortissement de remonte-pentes

21: Régime libre

Le câble d'un système de réglage de tension de remonte-pentes est enroulé autour d'une poulie de masse M, de rayon R, d'axe de rotation G_z , et de moment d'inertie I par rapport à cet axe. La poulie est attachée par son centre d'inertie G à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Sur cette poulie passe un fil inextensible et de masse négligeable: une des extrémités du fil est fixe en O', à l'autre est attachée une masse m en A.

a: Déterminer l'équation du mouvement du centre d'inertie de la poulie, repérée par sa coordonnée y. L'angle θ sera pris comme angle de la rotation de la poulie.



b: A l'équilibre du système (poulie + m + fil), déterminer les relations liant la réaction du bâti en O', m et g d'une part, la position d'équilibre de la poulie y_e , k, ℓ_0 , M, m et g d'autre part.

Réécrire l'équation du mouvement à l'équilibre pour l'écart à la position d'équilibre que l'on notera: $u = y - y_e$.

Calculer les pulsations propres et périodes de cet oscillateur.

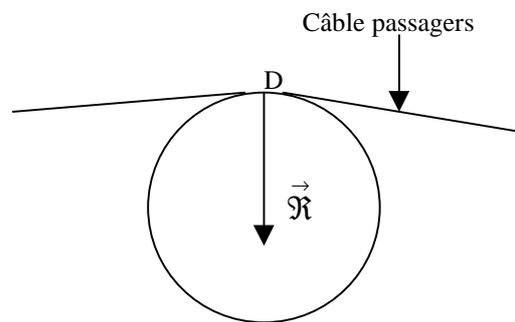
A.N.: $k = 1000 \text{ Nm}^{-1}$; $m = 100 \text{ kg}$; $M = 10 \text{ kg}$; $\ell_0 = 0,5 \text{ m}$;

22: Régime chargé et amorti

On charge à présent la poulie avec le câble porteur de passagers. La résultante des forces appliquées au système par ce dernier câble, $\vec{\mathfrak{R}}$, s'applique en D à tout instant, et est dirigée vers le sol. Pour le confort des passagers, le ressort est placé dans un fluide amortisseur de coefficient de frottement α .

a: L'équation du mouvement du système à l'équilibre sans amortissement ni $\vec{\mathfrak{R}}$ (système du § 21b) peut se mettre sous la forme: $(3M/2 + 4m)\ddot{u} + ku = 0$. Sa position d'équilibre vaut $y_e = -2,56 \text{ m}$.

Retrouver la nouvelle équation du mouvement avec amortissement et charge, puis calculer la nouvelle position d'équilibre, y_c , du système ?



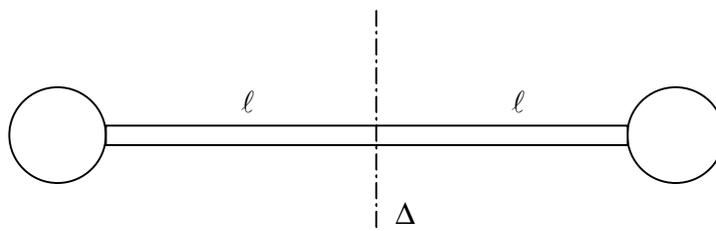
b: On veut éviter toute oscillation du système (être en régime aperiodique). Quelle condition doit satisfaire le paramètre α ?

A.N.: $\|\vec{\mathfrak{R}}\| = 3000 \text{ N}$

3: Volant d'inertie

Un volant d'inertie entretient la rotation d'un système mécanique. Ce volant est constitué de deux sphères de masses m, de rayon R, situées symétriquement par rapport à l'axe de rotation Δ du volant. Les deux sphères sont reliées entre elles par une barre filiforme rectiligne de masse m' de longueur 2ℓ . Les solides considérés sont homogènes.

- Calculer le moment d'inertie du système total par rapport à son axe de rotation.
- Quelle masse vaut-il mieux augmenter pour augmenter l'inertie du système ?
- De quelle énergie dispose-t-on si le volant est lancé à 2 tr s^{-1} ?



A.N.: $m = 10 \text{ kg}$; $R = 10 \text{ cm}$; $\ell = 1 \text{ m}$; $m' = 10 \text{ kg}$