

Mécanique

(Seule une fiche personnelle recto-verso et les calculettes sont autorisées. Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.)

1: Mesure d'un moment d'inertie – méthode de Gauss

La détermination du moment d'inertie d'un solide autour d'un axe n'est pas toujours possible par une méthode analytique (forme complexe, solide non homogène ...). Cette valeur peut toutefois être déterminée expérimentalement par la méthode des oscillations et de la surcharge inventée par Gauss, décrite ci-dessous.

Un fil de torsion de constante C passant par l'axe de rotation $\Delta // Oz$ est fixé au solide dont on veut déterminer le moment d'inertie I_1 (Figure 1). On fait osciller le "pendule de torsion" ainsi réalisé dans le plan horizontal (xOy). On s'arrange pour obtenir des frottements négligeables sur l'axe de rotation vertical Oz . Alors l'équation différentielle à laquelle obéit le solide est

$$I_1 \ddot{\theta} + C\theta = 0,$$

de période d'oscillation T_1 que l'on mesure. On fixe ensuite symétriquement sur le solide étudié deux cylindres identiques d'axes parallèles à Δ , de masse m et de rayon R à la distance L de l'axe de rotation Δ (Figure 2). L'ensemble possède un moment d'inertie I_2 et une période d'oscillations T_2 que l'on mesure à nouveau.

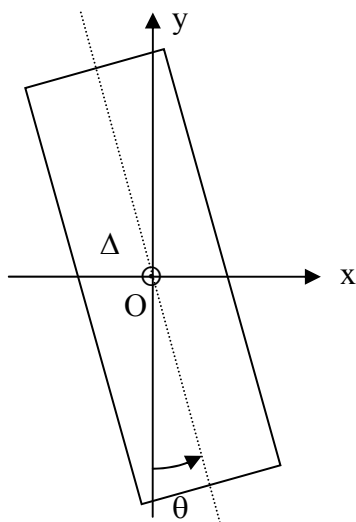


Figure 1

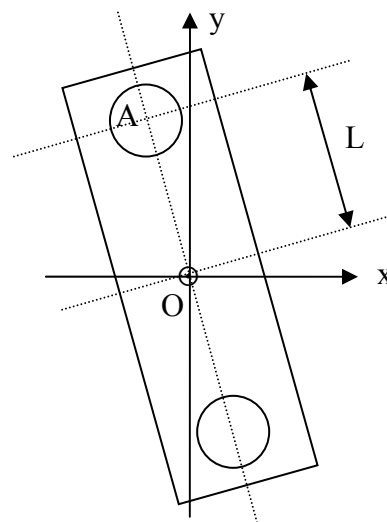


Figure 2

11: Quelles sont les périodes T_1 et T_2 du mouvement oscillant dans les deux cas des figures 1 et 2 respectivement ?

12: Retrouver l'expression du moment d'inertie I_{Az} d'un cylindre plein par rapport à son axe de révolution.

13: Calculer le moment d'inertie I_2 de l'ensemble (solide + cylindres) par rapport à l'axe Oz .

14: Ecrire le rapport $(T_1/T_2)^2$, en déduire la relation permettant de trouver I_1 en fonction de T_1 , T_2 , m , R et L . Conclure sur l'influence relative de R par rapport à L .

2: Suspensions de Formules 1

Les suspensions à double triangulation sont composées par deux triangles superposés fixés par des rotules sur le châssis, d'une voiture de course par exemple, et sur le porte-moyeu supportant le roulement, le système de freinage et la roue (Figure 1).

Les triangles peuvent être schématisés (Figure 2) par deux barres (OA et CB) rectilignes homogènes identiques de longueur L_T et de masse M_T . Le système [roue – porte-moyeu – roulement – système de freinage] est modélisé par la barre (AB) rectiligne homogène de longueur L_R et de masse M_R . Les articulations sont parfaites en O , A , B , C et B' , d'axe de rotation perpendiculaire au plan de la feuille de sorte que le mouvement des barres s'effectue dans le plan (OAB). Les points O , O' et C sont fixes et alignés. La suspension entre O' et B' (de masse négligeable) comporte un ressort de raideur k (longueur au repos ℓ_0) et un amortisseur de coefficient de frottement fluide α . Les aspérités de la route occasionnent en B une force vibromotrice verticale $F = F_0 \sin(\omega t)$, F_0 dirigée vers le haut.

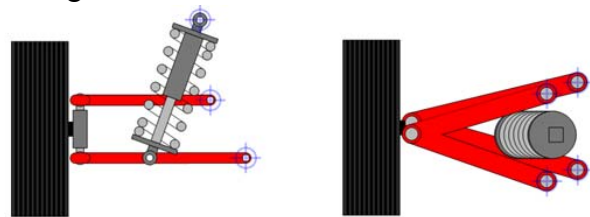


Figure 1

21: Ecrire l'équation du mouvement du système. On donne l'expression de la longueur du ressort $\ell = d - L \sin \theta$ où d est la longueur du ressort à $\theta = 0$, et $L = B'C$.

22: Réécrire cette équation dans le cas des petites oscillations.

23: Réécrire cette équation, en admettant que le système est à l'équilibre en l'absence de force appliquée pour $\theta = 0$.

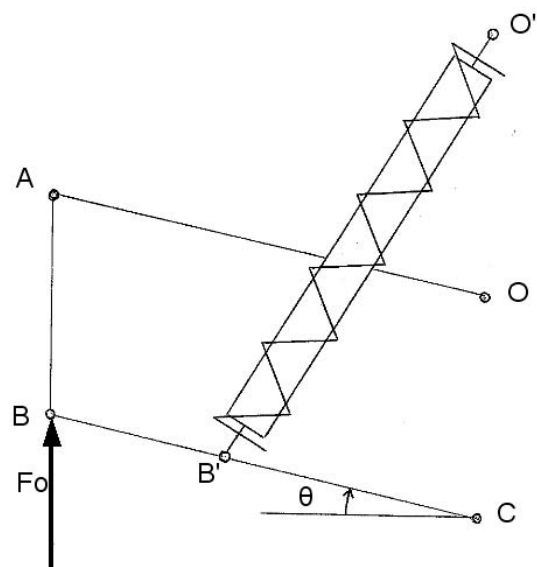


Figure 2

3: Mouvement oscillant

Un système mécanique oscillant possède un mouvement dont l'équation est:

$$\left(\frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{2}\right)L_1^2\ddot{\theta} + \alpha L'^2 \dot{\theta} + kL'\theta = F_0 L_1 \sin(\omega t)$$

Données: $M_1 = 10 \text{ kg}$, $M_2 = 30 \text{ kg}$, $L_1 = 50 \text{ cm}$, $L_2 = 25 \text{ cm}$, $k = 90 \text{ kNm}^{-1}$, $L' = 30 \text{ cm}$, $F_0 = 3 \text{ kN}$, $\alpha = 18 \text{ kNsm}^{-1}$.

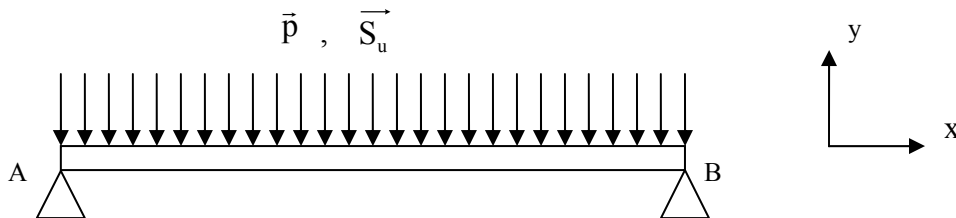
31. Donner l'expression de la pulsation propre, du facteur d'amortissement et de la position en l'absence de force appliquée. Application numérique.

Donner la forme de la solution correspondant à ce mouvement.

32. Donner les expressions du gain et de $\tan\varphi$ en fonction de ω . Tracer schématiquement les courbes de gain et de déphasage pour les valeurs numériques données.

4: Passerelle pour piétons

Une passerelle en appuis simples A et B, de longueur L, est considérée comme une poutre soumise à une sollicitation de flexion simple sous l'effet de son propre poids (\vec{p}) et sous l'effet de la surcharge induite par les piétons (\vec{S}_u). La surcharge est également considérée répartie sur toute la longueur AB de la passerelle. La passerelle est en béton, de section droite carrée de côtés a.



Données: $p = 2600 \text{ daNm}^{-1}$, $S_u = 400 \text{ daNm}^{-1}$, $L = 20 \text{ m}$, $I_{Gz} = 0.136 \text{ m}^4$, $W_{Gz} = 0.14 \text{ m}^3$, $a = 80 \text{ cm}$, $R_{et} = 1 \text{ Nmm}^{-2}$, $R_{eg} = 5 \text{ Nmm}^{-2}$.

41: Déterminer les réactions aux appuis sans piétons, puis avec piétons.

42: Déterminer les efforts de cisaillement et les moments fléchissants pour ces deux cas.

43: Tracer les diagrammes d'efforts de cisaillement et de moments de flexion pour la poutre chargée avec des piétons.

44: Déterminer les maxima de contraintes normale et tangentielle (σ_{\max} et τ_{\max}) de flexion dans la passerelle. Celle-ci peut-elle résister aux sollicitations, sachant que la construction est prévue avec un coefficient de sécurité $s = 2$.

CORRECTIONS

1

11: $T_1 = 2.\pi.(I_1 / C)^{1/2}$ et $T_2 = 2.\pi.(I_2 / C)^{1/2}$

12: Le moment d'inertie de chaque cylindre est : $I_{Az} = 1/2.mR^2$

13: Le moment d'inertie de l'ensemble est donc $I_2 = I_1 + 2mL^2 + 2I_{Az} = I_1 + 2mL^2 + 2(1/2mR^2)$

14: $(T_1/T_2)^2 = 4\pi^2(I_1/C) / 4\pi^2(I_2/C) = I_1/I_2$ d'où

$$I_1 = \left[I_1 + 2mL^2 + mR^2 \right] \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2$$

$$I_1 - I_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \left[2mL^2 + mR^2 \right] \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2$$

$$I_1 = \left[2mL^2 + mR^2 \right] \frac{\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2}$$

$$I_1 = \left[2L^2 + R^2 \right] \frac{mT_1^2}{T_2^2 - T_1^2}$$

En général le terme R^2 peut être négligé devant le terme $2L^2$.

2. et 3. (Merci Christopher)

1)

forces mises en jeu :

- conservatives :

$$\vec{P}_{OA}, \vec{P}_{AB}, \vec{P}_{BC}, \vec{T}_{Ressort}$$

- non-conserv :

$$\vec{F}_{aerodynamique}, \vec{F}_0$$

$$\text{théorème } E_c : \frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_{\text{non conserv}}$$

$$E = E_c + E_p$$

- E_c : $E_c(OA), E_c(AB), E_c(BC)$

$$E_c(OA) = E_c(BC) = \frac{1}{2} I_{OA} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \pi_T L_T^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} \pi_T L_T^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_c(AB) = \frac{1}{2} \pi_R \sigma_{AB}^2 = \frac{1}{2} \pi_R \sigma_A^2 = \frac{1}{2} \pi_R (L_R \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \pi_R L_R^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{donc } E_c = \frac{1}{3} \pi_T L_T^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \pi_R L_R^2 \dot{\theta}^2 = \left(\frac{\pi_T L_T^2}{3} + \frac{\pi_R L_R^2}{2} \right) \dot{\theta}^2$$

- E_p : $E_p(\text{Ressort}), E_p(OA), E_p(AB), E_p(BC)$

$$E_p^{\text{ress}} = \frac{1}{2} k (d - L' \sin(\theta) - l_0)^2 \cos(\gamma) \quad | \quad L' = BC$$

$$E_p(OA) = E_p(BC) = \pi_T g \frac{L_T}{2} \sin(\theta)$$

$$E_p(AB) = \pi_R g L_T \sin(\theta)$$

$$\text{donc } E_p = \frac{1}{2} k (d - l_0 - L' \sin(\theta))^2 \cos(\gamma) + \pi_T g L_T \sin(\theta) + \pi_R g L_T \sin(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} k (d - l_0 - L' \sin(\theta))^2 \cos(\gamma) + (\pi_T + \pi_R) g L_T \sin(\theta)$$

on a donc :

$$E = \left(\frac{\pi_T L_T^2}{3} + \frac{\pi_R L_R^2}{2} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k (d - l_0 - L' \sin(\theta))^2 \cos(\gamma) + (\pi_T + \pi_R) g L_T \sin(\theta)$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\pi_T L_T^2}{3} + \frac{\pi_R L_R^2}{2} \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} + k (d - l_0 - L' \sin(\theta)) (-L' \dot{\theta} \cos(\theta)) \cos(\gamma) + (\pi_T + \pi_R) g L_T \cos(\theta) \dot{\theta}$$

P.
mon centre :

⊙

$$P(\vec{F}_A) = -\alpha \vec{u}_B \cdot \vec{u}_B' = -\alpha u_B^2 = -\alpha L'^2 \dot{\theta}^2$$

$$P(\vec{F}_0) = \vec{F}_0 \sin(\omega t) \cdot \vec{u}_B = F_0 L_T \dot{\theta} \sin(\omega t) \cos(\theta)$$

on obtient donc :

$$\left(\frac{M_T L_T^2}{3} + \frac{M_R L_R^2}{2} \right) \ddot{\theta} + k(d-l_0 - L' \sin(\theta))(-L' \cos(\theta)) \cos(\gamma) + (M_T + M_R) g L_T \cos(\theta) = -\alpha L'^2 \dot{\theta}^2 + F_0 L_T \sin(\omega t) \cos(\theta)$$

on est dans le cas de petites oscillations :

$$\theta \text{ petit} \Rightarrow \sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$$

$$\left(\frac{M_T L_T^2}{3} + \frac{M_R L_R^2}{2} \right) \ddot{\theta} + k(d-l_0 - L')(-L') \cos(\gamma) + (M_T + M_R) g L_T = -\alpha L'^2 \dot{\theta}^2 + F_0 L_T \sin(\omega t)$$

à l'équilibre : $\theta = 0$ $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

$$k(d-l_0)(-L') \cos(\gamma) + (M_T + M_R) g L_T = 0$$

$$k(d-l_0) L' \cos(\gamma) = (M_T + M_R) g L_T$$

on peut donc écrire l'équation du mouvement :

$$\left(\frac{M_T L_T^2}{3} + \frac{M_R L_R^2}{2} \right) \ddot{\theta} + \alpha L'^2 \dot{\theta} + k L' \cos(\gamma) \theta = F_0 L_T \sin(\omega t)$$

2) On veut la forme canonique

③

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega t)$$

donc

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha L'^2}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)} \dot{\theta} + \frac{kL' \cos(\gamma)}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)} \theta = \frac{F_0 L_T \sin(\omega t)}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)}$$

par identification, on a :

$$\omega_0^2 = \frac{kL' \cos(\gamma)}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)} = \frac{90000 \times 0,3 \times \cos(26,56)}{\left(\frac{10 \times (0,5)^2}{3} + \frac{30 \times (0,25)^2}{2}\right)} = 13637,98 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\omega_0 = 116,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$2\xi\omega_0 = \frac{\alpha L'^2}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)} = \frac{18000 \cdot (0,3)^2}{\left(\frac{10 \times (0,5)^2}{3} + \frac{30 \times (0,25)^2}{2}\right)} = 914,82$$

$$\xi = 3,9168 > 1. \quad \text{régime aperiodique.}$$

$$\omega_0^2 \theta_0 = \frac{F_0 L_T}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)} = \frac{3000 \times 0,5}{\left(\frac{m_T L_T^2}{3} + \frac{m_R L_R^2}{2}\right)} = 847,0588$$

$$\theta_0 = 0,0621 \text{ rad} = 3,55 \text{ deg.}$$

3) la solution est de la forme :

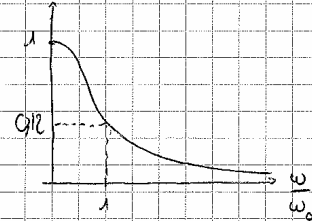
$$\theta = \theta_0 G \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $G = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4 \zeta^2 \omega_0^2 \omega}}$ et $\tan(\varphi) = \frac{2 \zeta \omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$

G : en $\omega = 0 \Rightarrow G = 1$

$\omega = \omega_0 \Rightarrow G = \frac{\omega_0^2}{2 \zeta \omega_0^2} = \frac{1}{2 \zeta} = 0,1276$

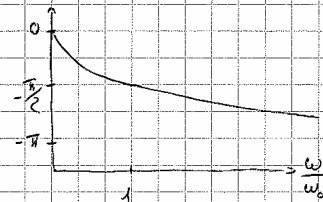
$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G \rightarrow 0$



φ : en $\omega = 0 \Rightarrow \tan(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\omega = \omega_0 \Rightarrow \tan(\varphi) \rightarrow -\infty \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \tan(\varphi) \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = \pi$



4. passerelle

41:

sans piétons:

$$R_A = R_B = pL/2 = 2600 \cdot 20 / 2 = 26000 \text{ daN}$$

Avec piétons:

$$R_A = R_B = (p+S_u)L/2 = (2600+400) \cdot 20 / 2 = 30000 \text{ daN}$$

42:

sans piétons

$$T(x) = R_A - px = pL/2 - px$$

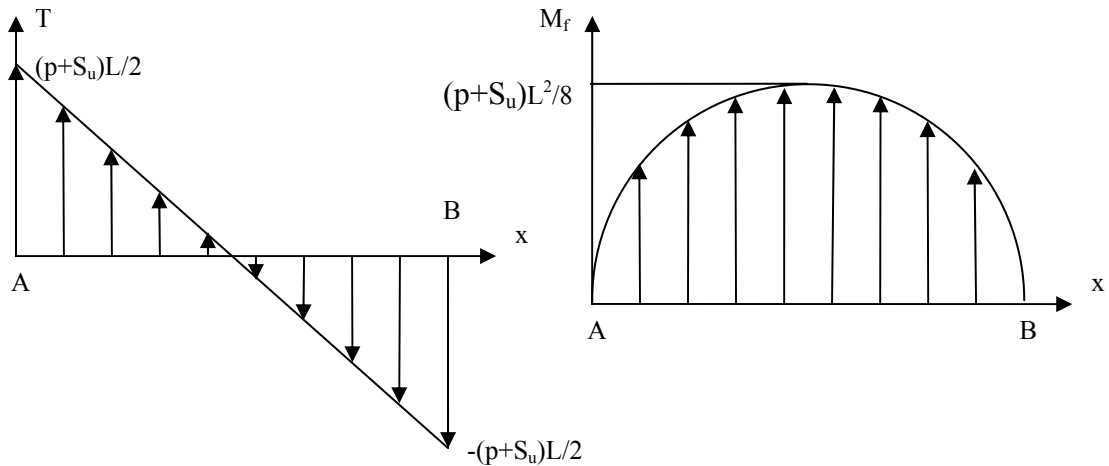
$$M_f = R_A x - px^2/2 = xpL/2 - px^2/2$$

Avec piétons

$$T(x) = R_A - px - S_u x = (p+S_u)L/2 - (p+S_u)x$$

$$M_f = x(p+S_u)L/2 - (p+S_u)x^2/2$$

43:



44:

La contrainte tangentielle de flexion s'exprime par $\tau = \frac{T_y W_{Gz}}{z I_{Gz}}$ soit une contrainte tangentielle de flexion maximum (en $z_{\max} =$ largeur de la poutre $= 0.8$ m, $x = 0$ ou L , $T = (p+Su)L/2$):

$\tau_{\max} = \frac{(p+Su)LW_{Gz}}{1.6I_{Gz}}$ aux bords de la poutre.

$$\tau_{\max} = \frac{20(26000 + 4000)0.14}{0.2176} = 154412 \text{ Nm}^{-2} = 0.154 \text{ MPa}$$

La contrainte normale de flexion s'exprime par: $\sigma = \frac{yM_f}{I_{Gz}}$ soit une contrainte normale de flexion maximum (en $y_{\max} = 0.8$ m, $x=L/2$ et $M_{fz} = (p+Su)L^2/8$):

$$\sigma_{\max} = \frac{0.8(p+Su)L^2}{8I_{Gz}} = \frac{320(26000 + 4000)}{1.088} = 8823530 \text{ Nm}^{-2} = 8.8 \text{ MPa}$$

au milieu de la poutre.

Pour résister la passerelle doit être conçue telle que:

$$\tau_{\max} \leq \frac{R_{eg}}{s} \text{ et } \sigma_{\max} \leq \frac{R_{et}}{s} \text{ ce qui fait que la passerelle cédera en traction !}$$