IUT de Caen **29 Mars 2003**
Département de Mesures Physiques **8h30-11h30**

Mécanique

(Seules les fiches personnelles et calculettes sont autorisées. Les questions 11, 12, 2, 24d et 3 sont indépendantes.)

Rappels: $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$; $\sin 2a = 2\sin a \cos a$;

1: Moment d'inertie d'une balle

Une balle (de tennis par exemple) est une superposition de deux sphères concentriques, l'une pleine homogène de rayon R et de masse totale M, l'autre vide de rayon r. La masse de la balle est m_b.

11: Retrouver l'expression du moment d'inertie d'une sphère pleine par rapport à un de ses diamètres, à partir de la forme générale du moment d'inertie, puis calculer celui de la balle. (On donne R = 7 cm; r = 6,8 cm; m_b = 3 g, v = 200 km/h);

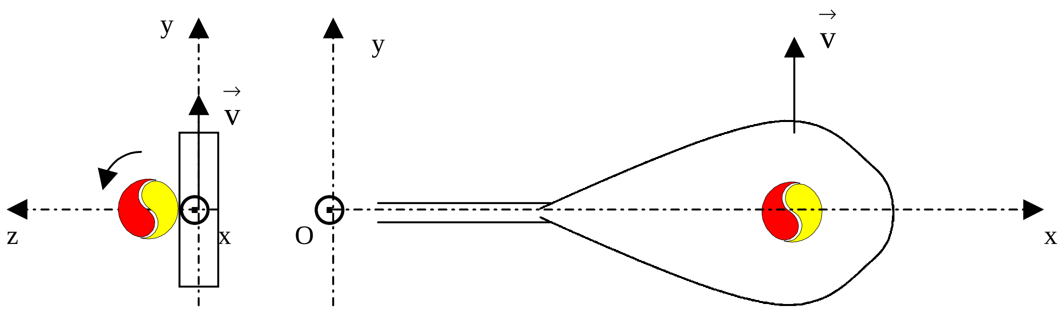

Figure 1

12: On étudie la rotation de la balle lors d'un "lift". A l'instant de l'impact de la balle sur la raquette, la vitesse du centre de la balle s'annule et la balle roule sans glissement sur la raquette, autour de son centre fixe C. Le vecteur vitesse de rotation de la raquette est $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$, et celui de la balle est $\vec{\Omega}_b = \omega_b \vec{e}_x$. Ecrire la relation entre ω_b et ω en utilisant la relation du champ des vitesses, puis calculer ω_b et ω.

2: Rotation guidée élastiquement contrainte

Une pièce (Figure 2) considérée comme un point matériel M de masse m est astreinte à se déplacer sans frottement sur un guide en forme de demi-cercle de centre O et de rayon R_0, situé dans le plan vertical (xOy). Cette pièce est attachée à l'extrémité d'un élastique AM de longueur au repos ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité de l'élastique est fixée en un point A situé à la verticale du point O à la distance OA = R_0.

daniel.chateigner@ismra.fr, CRISMAT-ISMRA

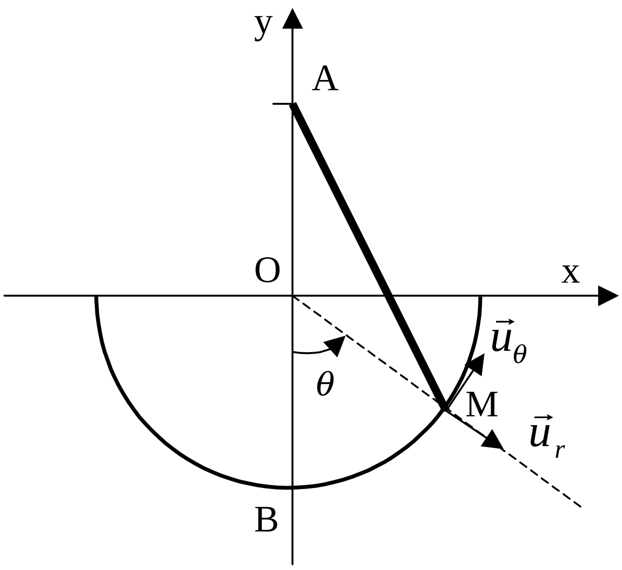

Figure 2

On repère la pièce M par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$ et on note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ la base polaire correspondante.

21: Préambule

a: Exprimer les vecteurs unitaires polaires $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, puis leurs dérivées $d\vec{u}_r/d\theta$ et $d\vec{u}_\theta/d\theta$ en coordonnées cartésiennes dans le plan (xOy). Retrouver alors l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)$ et de l'accélération $\vec{a}(M)$ sur la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de la Figure 2.

b: Faire un bilan des forces appliquées à la pièce M

22: Equation différentielle du mouvement

a: Déterminer la longueur $\ell = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ en fonction de R_0 et de θ.

b: On désigne par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'élastique orienté selon $\overrightarrow{AM}$. Exprimer la force de rappel $\vec{T}$ exercée par l'élastique sur la pièce en fonction de $\vec{u}$, puis démontrer que $\vec{T}$ s'écrit:

$$\vec{T} = k[\ell_0 - 2R_0 \cos(\theta/2)].[\cos(\theta/2)\vec{u}_r - \sin(\theta/2)\vec{u}_\theta]$$

c: Déterminer, toujours dans la base polaire, les expressions du poids $\vec{P}$ de la pièce et de la réaction $\vec{R}$ du guide sur la pièce (on notera R la norme de $\vec{R}$).

d: En appliquant la relation fondamentale de la dynamique et en la projetant suivant $\vec{u}_\theta$ puis suivant $\vec{u}_r$,

- montrer d'abord que θ est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre de la forme $\ddot{\theta} = f(\theta)$ que l'on précisera
- montrer ensuite que le module R du vecteur $\vec{R}$ s'écrit en fonction des données du problème mais aussi de θ et $(\dot{\theta})^2$

23: Bilan énergétique:

a: Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m.

b: Après avoir justifié le fait que l'énergie mécanique est conservée, utiliser cette propriété pour retrouver l'équation différentielle $\ddot{\theta} = f(\theta)$ déterminée précédemment.

24: Equilibres et mouvements de faible amplitude

a: A partir de l'équation différentielle obtenue à la question 22d ou 23b, déterminer les positions d'équilibre $\theta = \theta_e$ de la pièce.

b: On veut imposer l'existence d'une position d'équilibre pour une valeur θ_e de θ vérifiant $0 \langle \theta_e \langle \frac{\pi}{2}$, qui correspond à une pièce restant à l'intérieur du guide en équilibre stable. Quelle condition doivent alors vérifier les paramètres R_0, k, ℓ_0, m et g ?

c: On suppose en particulier que la raideur k et la longueur ℓ_0 à vide de l'élastique vérifient les relations suivantes:

$$k = \frac{2mg}{R_0} \qquad \text{et} \qquad \ell_0 = \frac{R_0\sqrt{3}}{2}$$

Calculer alors θ_e.

d: Après avoir remplacé θ par $\theta = \theta_e + \varepsilon$ dans l'équation différentielle obtenue à la question 22d, on montre que ε est solution de l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left([\sqrt{3}\cos\varepsilon + \sin\varepsilon][\frac{-g}{R_0} + \frac{k}{m}] - \frac{k\ell_0}{mR_0}(\cos\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\varepsilon}{2}) \right)$$

Simplifier l'écriture de l'équation différentielle obtenue en utilisant les relations données à la question 24c.

Montrer que, pour des mouvements de faible amplitude (ε très petit), le mouvement de la pièce est un mouvement oscillatoire (oscillateur harmonique) dont on précisera la pulsation ω_0.

Déterminer l'équation du mouvement de la pièce $\theta(t)$ en supposant lui avoir communiqué, à l'instant t =0, la vitesse $\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{gR_0}{2}}\vec{u}_\theta$ à partir de la position d'équilibre θ_e.

3: Equilibre statique d'une barre coudée

Une barre OA de masse m et de longueur a (Figure 3) est actionnée par une force $\vec{F}$ (norme F) à l'aide d'une barre de masse négligeable OB soudée à angle droit de longueur 2a. Le système est soumis au champ de pesanteur g dirigé selon -Oy, et est libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz. En A s'applique une force verticale $\vec{G}$ (norme G).

a- Inventorier les forces appliquées au système, puis énoncer les équations d'équilibre statique.

b- Appliquer les équations précédentes pour déterminer la réaction en O et la position d'équilibre θ en fonction de m, g, a, F, G.

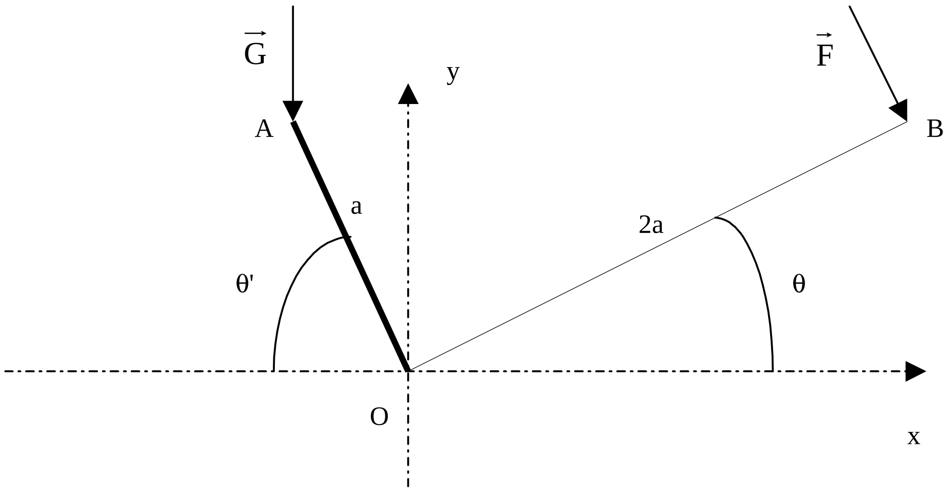

Figure 3