IUT de Caen **29 Mars 2003**
Département de Mesures Physiques **8h30-11h30**

Mécanique
Corrections

1: Moment d'inertie d'une balle

11: On pouvait pour répondre à la question prendre la même démarche que celle effectuée en TD. Cependant beaucoup se sont lancés dans le calcul préalable du moment d'inertie par rapport au centre de la sphère I_O.

On a I_O (sphère)= $\int d^2\, dm$, avec d = r

En coordonnées spériques:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$I_o(\text{sphère}) = \rho\int_0^R r^4\, dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_o^{2\pi} d\varphi = 4\rho\pi R^5/5$$

or

$$m = \rho\int_0^R r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\rho\pi R^3/3$$

soit

$$I_O = 3mR^2/5$$

Utilisant cette démarche il fallait alors connaître la relation liant I_O à I_{Oz} par rapport à un des diamètres de la sphère:

$$I_O = \int d^2\, \rho dV = \rho\iiint r^2 dV = \rho\iiint (x^2+y^2+z^2)dV$$

$$2I_O = \rho\iiint(2x^2+2y^2+2z^2)dV = \rho\iiint(x^2+y^2)dV + \rho\iiint(x^2+z^2)dV + \rho\iiint(y^2+z^2)dV = I_{Ox}+I_{Oy}+I_{Oz} = 3I_{Oz} \text{ par symétrie}$$

ce qui donne $I_{Oz} = 2I_O/3 = 2mR^2/5$

Pour la balle on a affaire à une sphère creuse, en prenant la même démarche que précédemment, et en remarquant que $I_{Ob} = I_O$ (sphère de rayon R) - I_O (sphère de rayon r):

	I_{Ob}	$= 4 \rho \pi R^5 / 5 - 4 \rho \pi r^5 / 5 = 4 \rho \pi (R^5 - r^5)/ 5$
comme	m_b	$= M - m = 4\rho\pi (R^3 - r^3) / 3$
on obtient		
	I_{Ob}	$= 3m_b(R^5 - r^5) / 5 (R^3 - r^3)$
Soit	I_b	$= 2I_{ob}/3 = 2m_b(R^5 - r^5) / 5 (R^3 - r^3) = 9{,}5\ 10^{-6}$ kg m^2

12: Pour les points coincidents Ib (appartenant à la balle) et Ir (appartenant à la raquette, la relation du champ des vitesses s'écrit:

$$\vec{v}(Ib) = \vec{v}(Ir) = \vec{v}(C) + \vec{\Omega}_b \wedge \vec{CIb} = \omega_b \vec{e}_x \wedge (-R\vec{e}_z) = \omega_b R \vec{e}_y$$

$$= \vec{\Omega} \wedge \vec{OIr} = \omega \vec{e}_z \wedge (2r)\ \vec{e}_x = 2\ \omega r \vec{e}_y \text{ (déplacement sans glissement)}$$

on a donc:

$$\omega_b R = 2\ \omega r = \|\vec{v}\| = 200 \text{ km h}^{-1}$$

$$\omega_b = 793{,}6 \text{ rd s}^{-1};\ \ \omega = 408{,}5 \text{ rd s}^{-1}$$

2: Rotation guidée élastiquement contrainte

21: Préambule

a:

$\vec{e}_r = \sin\theta\ \vec{e}_x - \cos\theta\ \vec{e}_y$ $\qquad$ $\vec{e}_\theta = \cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\sin\theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y = -\vec{e}_r$$

$$\vec{OM} = r\ \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta = R_0\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta \text{ dans notre cas}$$

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\ \dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = -R_0\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R_0\ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta \text{ dans notre cas}$$

b:

On dénombre le poids de la pièce $\vec{P}$, le rappel du guide sur la pièce $\vec{R}$ et la tension appliquée par le fil $\vec{T}$.

22: Equation différentielle du mouvement

a: $\ell = \|\vec{AM}\| = 2\ R_0\cos(\theta/2)$ ou $R_0\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

b: $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\ \vec{u}$ avec $\vec{u} = \cos(\theta/2)\ \vec{e}_r - \sin(\theta/2)\ \vec{e}_\theta$

$\vec{T} = k(\ell_0 - 2\ R_0\cos(\theta/2))(\cos(\theta/2)\ \vec{e}_r - \sin(\theta/2)\ \vec{e}_\theta)$

c: $\vec{P} = mg(\cos\theta\ \vec{e}_r - \sin\theta\ \vec{e}_\theta)$ et

$\vec{R} = R\vec{e}_r$

d: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

$$mg\begin{vmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}k(\ell_0-2R_0\cos\frac{\theta}{2})\cos\frac{\theta}{2}\\-k(\ell_0-2R_0\cos\frac{\theta}{2})\sin\frac{\theta}{2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}-R_0\dot\theta^2\\R_0\ddot\theta\end{vmatrix}$$

et donc

$\ddot\theta$ $= -(g/R_0)\sin\theta - (k/mR_0)(\ell_0-2R_0\cos(\theta/2))\sin(\theta/2)$

$= \sin\theta(k/m-g/R_0) - (k\ell_0/mR_0)\sin(\theta/2)$

R $= -mR_0\dot\theta^2 - mg\cos\theta - k(\ell_0-2R_0\cos(\theta/2))\cos(\theta/2)$

23: Bilan énergétique:

a: Em $= Ec+Ep$

Ec $= mv^2/2 = mR_0^2\dot\theta^2/2$ vu 21a

Ep $= -mgR_0\cos\theta - 2kR_0\ell_0\cos(\theta/2) + kR_0^2\cos\theta$

dEp $= -\delta W = -(\vec P.d\overrightarrow{OM}+\vec T.d\overrightarrow{OM})$ avec $d\overrightarrow{OM}=R_0d\theta\,\vec e_\theta$

$= R_0d\theta\, mg\sin\theta + k(\ell_0-2R_0\cos(\theta/2))R_0d\theta\sin(\theta/2)$

Em $= mR_0^2\dot\theta^2/2 + 2kR_0\ell_0(1-\cos(\theta/2)) + 2R_0(mg-kR_0)(1-\cos^2(\theta/2))$

b: On a pas de forces non conservatives, donc

$\frac{d\overrightarrow{Em}}{dt}=0$, et on retrouve l'équation du 22d

24: Equilibres et mouvements de faible amplitude

a: pour avoir équilibre on a

$\frac{d\overrightarrow{Ep}}{d\theta} = 0$

$= -(kR_0^2-mgR_0)\sin\theta + kR_0\ell_0\sin(\theta/2)$

donc

$-(kR_0-mg)\sin\theta + k\ell_0\sin(\theta/2) = 0$

$-2(kR_0-mg)\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) + k\ell_0\sin(\theta/2) = 0$

$\cos(\theta_e/2) = k\ell_0 / 2(kR_0-mg)$

résultat que l'on peut obtenir également en annulant la somme des forces extérieures.

b: Pour avoir $0\langle\theta_e\langle\frac{\pi}{2}$ il faut:

$0\langle\frac{\theta_e}{2}\langle\frac{\pi}{4}$

$1\langle\cos\frac{\theta_e}{2}\langle\frac{\sqrt2}{2}$

$1\rangle\frac{k\ell_0}{2(kR_0-mg)}\rangle\frac{\sqrt2}{2}$

c: On a:

$\cos\frac{\theta_e}{2}=\frac{k\ell_0}{2(kR_0-mg)}=\frac{\sqrt3}{2}$ avec $k=\frac{2mg}{R_0}$ et $\ell_0=\frac{R_0\sqrt3}{2}$

donc $\theta_e = 60°$

d:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left([\sqrt{3}\cos\varepsilon + \sin\varepsilon][\frac{-g}{R_0} + \frac{k}{m}] - \frac{k\ell_0}{mR_0}(\cos\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\varepsilon}{2})\right)$$

avec $k = \frac{2mg}{R_0}$ et $\ell_0 = \frac{R_0\sqrt{3}}{2}$

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left([\sqrt{3}\cos\varepsilon + \sin\varepsilon]\frac{g}{R_0} - \frac{g\sqrt{3}}{R_0}(\cos\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\varepsilon}{2})\right)$$

pour les peities oscillations, sin$\varepsilon \approx \varepsilon$ et cos$\varepsilon \approx 1$

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left([\sqrt{3} + \varepsilon]\frac{g}{R_0} - \frac{g\sqrt{3}}{R_0}(1 + \sqrt{3}\,\frac{\varepsilon}{2})\right)$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{4R_0}\varepsilon$$

qui est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R_0}}$$

dont le mouvement peut s'écrire:

$\varepsilon\ (t) = \theta_e + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

à t=0:

$\varepsilon = \theta_e$, avec $\varepsilon = \theta_e + A\cos\varphi$

donc $0 = A\cos\varphi$, $\varphi = \arccos 0 = \pm\pi/2$

et

$\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{gR_0}{4}}\vec{e}_\theta = R_0\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = R_0\omega_0\vec{e}_\theta$, donc $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R_0}}$

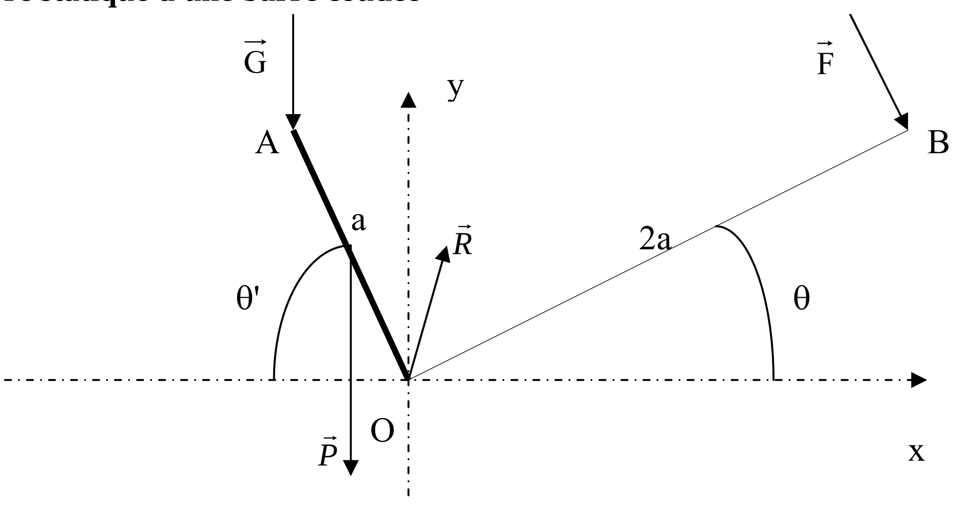
avec $\dot{\varepsilon} = -A\,\omega_0 \sin(\varphi)$

donc $1 = -A\sin(\varphi)$

comme $\varphi = \pm\pi/2$, $A = \pm 1$

donc $\varepsilon\ (t) = \theta_e \pm (\omega_0 t \pm \pi/2)$

3: Equilibre statique d'une barre coudée



a: Les forces sont $\vec{G}$, $\vec{P}$, $\vec{F}$ et $\vec{R}$.
Pour avoir équilibre statique il faut:
$\vec{G}+\vec{P}+\vec{F}+\vec{R}=\vec{0}$, et

$$\vec{CA}\wedge\vec{G}+\frac{\vec{CA}}{2}\wedge\vec{P}+\vec{CB}\wedge\vec{F}+\vec{CC}\wedge\vec{R}=\vec{0}$$

b: La première équation donne:

$$\begin{vmatrix}0\\-G\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\-mg\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F\sin\theta\\-F\cos\theta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}R_x\\R_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$$, soit

$$\begin{vmatrix}R_x=-F\sin\theta\\R_y=mg+G+F\cos\theta\end{vmatrix}$$

la deuxième équation donne:

$$\begin{vmatrix}-a\cos\theta'\\a\sin\theta'\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-G\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}\cos\theta'\\\frac{a}{2}\sin\theta'\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-mg\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a\cos\theta\\2a\sin\theta\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}F\sin\theta\\-F\cos\theta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}R_x\\R_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$$ avec $\theta'=\pi/2-\theta$ donc $\cos\theta'=\sin\theta$, soit

$$\sin\theta=\frac{-2F}{G+\frac{mg}{2}}$$