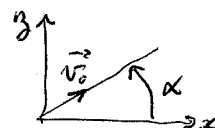


TD Mécanique n°2

- I - 1) $\vec{g} = \vec{g}e$: mouvement uniformément accéléré



$$\vec{v} = \int \vec{g} dt = \vec{g}t + \vec{g}e = \vec{g}t + \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \int (\vec{g}t + \vec{v}_0) dt = \vec{g} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{g}e$$

C.I. : $\vec{OM}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{g}e = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OM} = \vec{g} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t}$$

~~2)~~ On peut utiliser $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{OM}(t) - \vec{OM}(0))$

$$\Rightarrow 0 = 2\vec{g} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t - \vec{0} \right) \quad \text{à partir de}$$

$$= g^2 t^2 + 2\vec{g} \cdot \vec{v}_0 t$$

$$= t(g^2 t + 2\vec{g} \cdot \vec{v}_0)$$

mais si $t=0$ mais = départ.

$$g^2 t + 2\vec{g} \cdot \vec{v}_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2\vec{g} \cdot \vec{v}_0}{g^2}$$

or $\vec{g} = -g \vec{e}_y$ et $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \vec{g} \cdot \vec{v}_0 = -g v_0 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow t = \frac{2g v_0 \sin \alpha}{g^2} = \boxed{\frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}}$$

alors, $\vec{v}$ vaut $\vec{g}t + \vec{v}_0 = \vec{g} \left(\frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \right) + \vec{v}_0 \quad (\vec{g} = -g \vec{e}_y)$

$$= -2 v_0 \sin \alpha \vec{e}_y + v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{v} = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x - v_0 \sin \alpha \vec{e}_y}$$

- II - 1) Il faut éliminer la variable t : faire apparaître x ds y :

$$y = A \cos 2\omega t = A (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$

$$= A (1 - \sin^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$

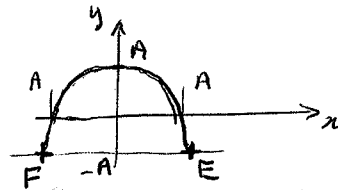
$$= A (1 - 2 \sin^2 \omega t)$$

$$\rightarrow y = A \left(1 - 2 \frac{x^2}{A^2} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{y = A - 2 \frac{x^2}{A}} \quad \text{eq}^0 \text{ d'une parabole.}$$

$$x=0 \rightarrow y=A$$

$$x \rightarrow \pm\infty \rightarrow y \rightarrow -\infty$$



mais comme x varie entre $-A$ et $+A$ ($\sin \in [-1, 1]$),
 y décrit seulement 1 arc de parabole: $-A \leq y \leq A$

$$2) \quad \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} A\omega \cos \omega t \\ -2\omega A \sin 2\omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(P) = \begin{pmatrix} -A\omega^2 \sin \omega t \\ -4\omega^2 A \cos 2\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -4\omega^2 y \end{pmatrix}$$

au sommet de la trajectoire: $x=0, y=A$: à quel t cela correspond?

$$\begin{cases} x=0 \\ y=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \omega t = 0 \\ \cos 2\omega t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega t = k\pi \quad (k \text{ entier}) \\ 2\omega t = 2k\pi \quad (k \text{ entier}) \rightarrow \omega t = k\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\omega t = k\pi} \quad (k \text{ entier}) \quad 0, \pi, \dots$$

pour cette condition: $\vec{v}(s) = \begin{cases} \pm A\omega & (\cos \omega t = \pm 1) \\ 0 & (\sin 2\omega t = 0) \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v}(s) = \pm A\omega \vec{e}_x$, horizontale, alternativement dirigée à droite et à gauche.

⚠ la vitesse n'est pas nulle au sommet de la trajectoire. C'est $y'(x)$ qui est nulle au sommet $\neq \vec{v}(t)$

$$\boxed{\|\vec{v}(s)\| = A\omega}$$

$$3) \quad \vec{v}(P) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \cos \omega t = 0 \\ \sin 2\omega t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \omega t = 0 \\ 2\cos \omega t \sin \omega t = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{v}(P) = 0 \quad \text{pour} \quad \cos \omega t = 0 \rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \text{ entier})$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} : \begin{cases} x = A \\ y = -A \end{cases} \rightarrow \text{point E}$$

$$\omega t = \frac{3\pi}{2} : \begin{cases} x = -A \\ y = -A \end{cases} \rightarrow \text{point F}$$

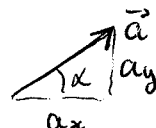
En ces 2 points, la vitesse s'annule et la pointe rebrousse chemin.

$$\vec{a}(P) = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -4\omega^2 y \end{pmatrix} \quad \vec{a}(E) = \begin{pmatrix} -\omega^2 A \\ 4\omega^2 A \end{pmatrix} \quad \vec{a}(F) = \begin{pmatrix} \omega^2 A \\ 4\omega^2 A \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant calculer la pente de la tangente à la trajectoire en E et F, puis comparer avec la pente de $\vec{a}$ en ces points.

$$y'(x) = -\frac{4x}{A} = \text{pente de la trajectoire } y(x)$$

$$\text{pente du vecteur } \vec{a} = \tan \alpha = \frac{a_y}{a_x}$$



$$\text{en E: } \left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{4\omega^2 A}{-\omega^2 A} = -4 \\ \text{comme } y'(E) &= -4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{vecteur accélération} \\ &\text{tangent à la parabole} \\ &\text{en E, avec} \\ &\quad \ddot{x} < 0 \\ &\quad \ddot{y} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{en } F : \left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{4\omega^2 A}{\omega^2 A} = 4 \\ y'(F) &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ idem avec } \begin{aligned} \ddot{x} &> 0 \\ \ddot{y} &> 0 \end{aligned}$$

$$4) \quad \text{Sommet : } \left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= A \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\omega^2 A \end{pmatrix} \text{ dirigée vers } 0$$

$$\vec{a}(s) = -4\omega^2 A \vec{e}_y$$

$$\text{or } \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{r} \vec{e}_n \quad (\text{repère de Frenet})$$

général

$$\text{or } \vec{v}(s) = \pm A\omega \vec{e}_x \rightarrow \text{horizontale : } \vec{e}_t = \pm \vec{e}_x$$

$$\text{en } S : \left| \begin{aligned} \vec{e}_t &= \vec{e}_x \\ \vec{e}_n &= -\vec{e}_y \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = 0 ; \frac{v^2}{r} = 4\omega^2 A}$$

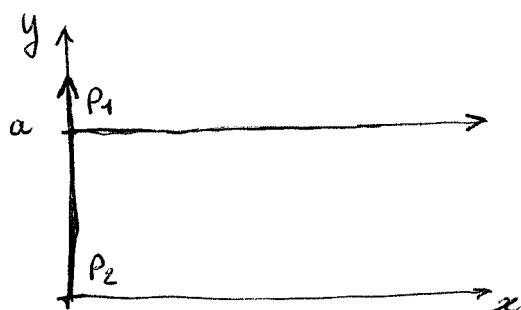
par identification entre
les 2 formes de $\vec{a}(s)$

$$\Rightarrow r(s) = \frac{v^2}{4\omega^2 A} = \frac{A^2 \omega^2}{4\omega^2 A} \quad (v(s) = A\omega)$$

$$\rightarrow \boxed{r(s) = \frac{A}{4}}$$

la trajectoire a la concavité d'un cercle de rayon $\frac{A}{4}$ centré en $(0, \frac{3A}{4})$.

- III - 1)



trajectoires rectilignes
uniformes (vitesses c_{tes}).

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{OP_1}(t) &= \int \vec{v_1} dt = v_1 t \vec{e}_x + \vec{OP_1}(0) = v_1 t \vec{e}_x + a \vec{e}_y \\
 \vec{OP_2}(t) &= \int \vec{v_2} dt = v_2 t \vec{e}_y + \vec{OP_2}(0) = v_2 t \vec{e}_y \\
 \vec{P_1P_2} &= \vec{P_1O} + \vec{OP_2} = -v_1 t \vec{e}_x - a \vec{e}_y + v_2 t \vec{e}_y \\
 \vec{P_1P_2} &= \begin{pmatrix} -v_1 t \\ v_2 t - a \end{pmatrix} \rightarrow P_1P_2 = \sqrt{v_1^2 t^2 + (v_2 t - a)^2}
 \end{aligned}$$

$$3) \quad \vec{v}_{R_1}(P_2) = \frac{d}{dt} \vec{P_1P_2}_{R_1} \quad \text{puisque } \vec{P_1P_2} \text{ est le vecteur position de } P_2 \text{ dans } R_1$$

$$\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -v_1 t \\ v_2 t - a \end{pmatrix} \quad \vec{e}_x \text{ et } \vec{e}_y \text{ sont fixes dans } R, R_1 \text{ et } R_2, \text{ on a juste \u00e0 d\u00e9river les coordonn\u00e9es.}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}_{R_1}(P_2) = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\vec{a}_{R_1}(P_2) = 0}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_{R_2}(P_1) &= \frac{d}{dt} \vec{P_2P_1}_{R_2} = - \frac{d}{dt} \vec{P_1P_2}_{R_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \\
 \vec{P_2P_1} &= \vec{P_2O} + \vec{OP_1} = -(\vec{OP_2} + \vec{P_1O}) = -\vec{P_1P_2} \quad (R \text{ fixe})
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{a}_{R_2}(P_1) = 0$$

$$4) \quad \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -v_1 t \\ v_2 t - a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -v_1 t \\ y = v_2 t - a \end{cases} \rightarrow t = -\frac{x}{v_1}$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{v_2}{v_1} x - a}$$

$$\begin{aligned}
 x &= -v_1 t \\
 \Rightarrow x &< 0
 \end{aligned}$$

