

TD MECANIQUE N°3

CINEMATIQUE DU SOLIDE

VECTEURS VITESSES ET VITESSES DE ROTATION

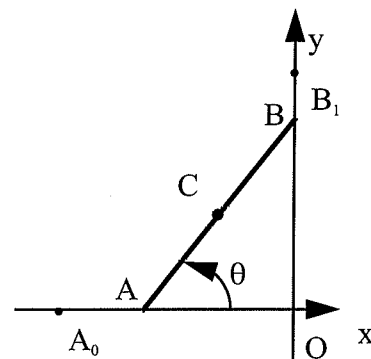
I -

Un solide tourne autour d'un axe localisé dans le plan (xOy). A l'instant t, les points A(2,4,6) et B(3,5,7) du solide ont pour vecteurs vitesses $\vec{v}(A)$ (1, $\sqrt{3}$, -3) et $\vec{v}(B)$ (-2, 0, $\sqrt{3}$).

- 1- Déterminer le vecteur vitesse de rotation
- 2- Quelle est la vitesse angulaire du solide ?
- 3- Quel est l'angle polaire du vecteur vitesse de rotation ?

II-

Une barre rectiligne AB, de longueur L, de milieu C est mobile dans un plan. Les points A et B glissent le long des axes Ox et Oy respectivement, de sorte que la barre se déplace de la position A_0O à la position OB_1 . On désigne par θ l'angle $(\vec{e}_x, \vec{AB})$ orienté par $\vec{e}_z$. Le mouvement de AB est réalisé avec une vitesse angulaire constante positive $\dot{\theta} = \omega$.



- 1- Exprimer $\theta(t)$, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{v}(A)$, $\vec{v}(C)$ de 2 façons.
- 2- Quelle est la trajectoire du point C ?
- 3- Calculer la vitesse angulaire du point C correspondant à ce mouvement.
- 4- Calculer la vitesse angulaire de rotation de AB autour de C

I) 1) $\vec{v}(B) - \vec{v}(A) = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$

avec $\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$ car $\vec{\Omega}$ dans (x, y)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 3-2 \\ 5-4 \\ 7-6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y \\ -x \\ x-y \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y &= -3 \\ x &= +\sqrt{3} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$2) \quad \omega = \|\vec{\Omega}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ rad s}^{-1}$$

$$3) \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{\Omega}\| \|\vec{e}_x\| \cos \theta$$

$$\rightarrow \cos \theta = \begin{vmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \theta = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y = -3 = \|\vec{\Omega}\| \|\vec{e}_y\| \sin \theta = 2\sqrt{3} \sin \theta$$

$$\rightarrow \sin \theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} < 0$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}} \text{ rad}$$

II / ♦1) $\theta(t) = \int \dot{\theta}(t) dt = \omega t + \theta_0 = \omega t + \theta(0)$

$t=0 : \theta=0 \rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega t}$

$AO = L \cos \theta \rightarrow \boxed{\vec{OA} = -L \cos \theta \vec{e}_x} = -L \cos(\omega t) \vec{e}_x$

$\vec{OB} = L \sin \theta \vec{e}_y = L \sin(\omega t) \vec{e}_y$

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \frac{\vec{AB}}{2} = \vec{OA} + \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{2} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y) \end{aligned}$$

$\vec{v}(A) = \frac{d\vec{OA}}{dt} = L\omega \sin \omega t \vec{e}_x$

$\vec{v}(C) = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \frac{L\omega}{2} (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y)$

ou bien :

$\vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{AC} &= \vec{\Omega} \wedge \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2} \cos \omega t \\ \frac{L}{2} \sin \omega t \\ 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{L\omega}{2} \sin \omega t \\ \frac{L\omega}{2} \cos \omega t \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{v}(C) &= -L\omega \sin \omega t \vec{e}_x + \frac{L\omega}{2} \cos \omega t \vec{e}_y - \frac{L\omega}{2} \sin \omega t \vec{e}_x \\ &= \frac{L\omega}{2} (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y) \end{aligned}$$

♦2) Les coordonnées de C vérifient :

$$x^2 + y^2 = \frac{L^2}{4} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{L^2}{4} = R^2$$

la trajectoire de C est donc un arc de cercle de centre O et de rayon $R = \frac{L}{2}$

~~3)~~ $\vec{v}(C) = \vec{\Omega}' \wedge \vec{OC}$

posons $\vec{\Omega}' = \omega' \vec{e}_y$ on cherche ω'

$$\vec{\Omega}' \wedge \vec{OC} = \omega' \vec{e}_y \wedge \frac{L}{2} (-\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

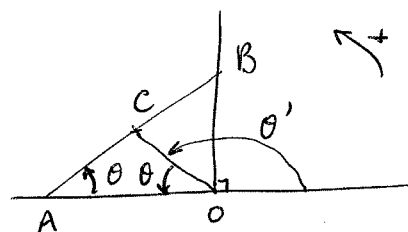
$$= \frac{L\omega'}{2} (-\cos \omega t \vec{e}_y - \sin \omega t \vec{e}_x)$$

$$= -\frac{L\omega'}{2} (\cos \omega t \vec{e}_y + \sin \omega t \vec{e}_x)$$

on $\vec{v}(C) = \frac{L\omega}{2} (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y)$

donc $\omega' = -\omega \rightarrow C$ tourne en sens indirect
alors que la barre tourne
en sens direct.

on peut voir aussi que puisque
 C effectue une rotat de rayon
 $\frac{L}{2}$, le triangle ACO est isocèle.



donc $\theta' = \pi - \theta \rightarrow \dot{\theta}' = -\dot{\theta}$

4) Le m^{re} de la barre est une rotation autour de l'axe
(C, $\vec{e}_y$) lui $\vec{m}$ en rotation autour de l'axe (O, $\vec{e}_y$), avec
pour vecteurs de rotat resp. $\vec{\Omega}^* = +\omega \vec{e}_y$ et $\vec{\Omega}' = -\omega \vec{e}_y$.

On peut calculer la vitesse angulaire de rotat de AB autour
de C: $\vec{\Omega}(AB/OC)$

$$\vec{\Omega}(OC/R) = \vec{\Omega}' \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(AB/R) = \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(AB/R) = \vec{\Omega}(AB/OC) + \vec{\Omega}(OC/R)$$

$$\rightarrow \vec{\Omega}(AB/OC) = \vec{\Omega} - \vec{\Omega}' = 2\omega \vec{e}_y$$