Dans cette correction, les **vecteurs** sont en gras

Général :

a- Je crois que la notion de vitesse angulaire n'est pas très claire pour moi. Pouvez-vous m'expliquer ?

Souvent, on ne saisit pas la façon dont on peut représenter la rotation d'un point ou d'un objet. Avec les mains bien sûr on y arrive, tourner la tête autour de l'axe du cou, ou voir des aiguilles tourner autour de l'axe de l'horloge on voit ça bien. Mais comment exprimer cette rotation mathématiquement ? Comme on le fait avec le vecteur vitesse pour représenter un déplacement d'objet en translation ?

C'est à cela que sert le vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$. Il sert à exprimer que lorsqu'un objet tourne dans un plan (donc que son vecteur vitesse et son vecteur position sont dans ce plan, disons le plan (xOy)), l'axe autour duquel il tourne est porté par un vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan, donc $\mathbf{e_z}$. Et à l'image de la norme du vecteur vitesse qui représente la "rapidité" avec laquelle se déplace l'objet dans le plan (mesurée en $m.s^{-1}$), pour le vecteur vitesse de rotation, il faut exprimer la rapidité avec laquelle l'objet tourne autour de l'axe: c'est la vitesse angulaire (ω), ou norme de $\boldsymbol{\Omega}$, qui se mesure en $rad.s^{-1}$. Tout ceci se résume par, dans cet exemple:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{e_x} + v_y\,\mathbf{e_y} = \dot{x}\,\mathbf{e_x} + \dot{y}\,\mathbf{e_y} = \|v\|\,\mathbf{e};$$

e est alors le vecteur unitaire porteur de **v** à l'instant t, et :

$$\boldsymbol{\Omega} = \|\Omega\|\,\mathbf{e_z} = \omega\,\mathbf{e_z}$$

si l'angle θ est celui qui mesure la rotation dans le plan (xOy), alors $\omega = d\theta/dt = \dot{\theta}$

b- Pour la résolution d'exercices de ce type, pour trouver la vitesse angulaire d'un solide, cela revient à trouver la vitesse angulaire d'un point de ce solide ? Et une fois l'équation du champ des vitesses résolue, quelle est la suite de la méthode ?

Pour trouver la vitesse angulaire du solide, il faut d'abord déterminer le vecteur vitesse de rotation du solide $\boldsymbol{\Omega}$, par l'application de la relation du champ des vitesses. Quand on a les composantes de $\boldsymbol{\Omega}$ on peut calculer sa norme donc obtenir ω.
Comme il n'existe qu'un seul vecteur vitesse de rotation du solide dans le cas général, effectivement, trouver la vitesse angulaire d'un des points du solide suffit, c'est d'ailleurs comme cela que l'on utilise la relation du champ des vitesses, en considérant qu'un des deux points est fixe par rapport au solide.

- I) et II) :

Dans ces 2 exercices, on nous demande de calculer la vitesse angulaire. Or dans l'exercice I) on calcule simplement la norme de Oméga et dans le II) on utilise la formule du champs des vitesses. Quand doit-on utiliser une méthode plutôt qu'une autre? Existe-t-il une méthode générale?

Dans les deux exercices nous utilisons l'équation du champ des vitesses. Dans l'exercice I), en I)1., et dans l'exercice II), en II)3.

-I)1.
Je ne visualise pas comment on obtient la formule de départ de cet exercice:
v(B) - v(A) = Ω ^ AB. *Je ne vois pas comment obtenir cette égalité*

C'est la relation du champ des vitesses. Elle est démontrée dans le cours au chapitre de cinématique du solide, page 38 :
http://www.ecole.ensicaen.fr/~chateign/enseig/meca/Cinematique_du_Solide.pdf

-I)3.
Je ne comprends pas pourquoi le vecteur $\mathbf{e}_x$ *est représenté par les coordonnées (1 ;0 ;0)*

$\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire porteur de l'axe Ox. Comme un vecteur **v** en repère cartésien s'exprime par $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$, avec les coordonnées (x ;y ;z) = (1 ;0 ;0) du vecteur, on obtient $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x$.

-II)2.
Je ne comprends pas comment on sait que les coordonnées de C doivent vérifier $x^2 + y^2$ *? Comment sait-on que ces coordonnées doivent répondre à l'équation d'un cercle et non d'une droite par exemple?*

Ce n'est pas qu'elles doivent vérifier cette relation, mais c'est en regardant l'expression des composantes du vecteur **OC(t)** que l'on peut aisément s'en apercevoir. On a établi à la question précédente que :

$\mathbf{OC(t)} = [\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y - \cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x]\,L/2$

on a donc pour le point C: $x(t) = -\cos(\omega t)L/2$; $y(t) = \sin(\omega t)L/2$

A cette étape les choses deviennent plus faciles à voir (si on connait l'équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes):

$x^2 + y^2 = (L/2)^2 = R^2$ avec $R = L/2$ = rayon du cercle.

Lorsque le vecteur position d'un point est représenté par deux composantes, l'une en sinus et l'autre en cosinus, il faut s'attendre à cela. Ce ne peut pas être une trajectoire linéaire avec ces deux composantes périodiques.

*Comment sait-on que **AC** est égal à l'inverse de **OC** ?*

Ce n'est pas le cas ! Je pense que tu parles d'opposé, pas d'inverse. Ils ne sont pas opposés l'un de l'autre, pour s'en convaincre il suffit de tracer ces deux vecteurs sur la figure.

-III)
Je ne comprends pas la démarche pour obtenir l'angle polaire

Pour connaître l'angle que fait ce vecteur avec l'abscisse Ox, on utilise le produit scalaire. Ce produit scalaire nous donne $\cos(\theta) = 1/2$. Mais il existe deux angles dont le cosinus vaut 1/2, $\pm\pi/3$.
Pour déterminer lequel est le bon, on calcule le produit scalaire entre $\mathbf{\Omega}$ et Oy, qui nous donne le signe de l'angle par le signe du $\sin(\theta)$.

Je ne comprends pas le passage de $\Omega \wedge \mathbf{OC} = \omega' \mathbf{e_z} \wedge L/2(...) = L\omega'/2(...)$

On cherche le vecteur vitesse de rotation $\mathbf{\Omega'}$ de C autour de l'axe Oz. On peut donc exprimer $\mathbf{\Omega'}$ par $\mathbf{\Omega'} = \omega' \mathbf{e_z}$. Ensuite on utilise la relation du champ des vitesses pour la barre OC (imaginaire) qui décrit le mouvement de C. Cette relation donne directement $\mathbf{v(C)} = \mathbf{\Omega'} \wedge \mathbf{OC}$, puisque $\mathbf{v(O)} = \mathbf{0}$. **OC** a été calculé avant, et on peut identifier le **v(C)** calculé ici avec celui calculé précédemment. Cela donne $\omega = -\omega'$, ce qui permet de voir que le point C tourne en sens inverse de celui de la barre AB.
Rq : il faut prendre l'habitude de calculer les produits vectoriels des vecteurs unitaires :

$\mathbf{e_z} \wedge \mathbf{e_x} = \mathbf{e_y}$ $\qquad$ $\mathbf{e_z} \wedge \mathbf{e_y} = -\mathbf{e_x}$

A quoi correspond $\dot{\theta}$ sur les graphiques de correction ?

$\dot{\theta}$ est la façon plus rapide d'écrire $d\theta/dt$, comme on écrit $dx/dt = \dot{x}$. C'est donc la vitesse angulaire (ou dérivée temporelle de la variable position angulaire θ).