Dans cette correction, les **vecteurs** sont en gras

Général :

Quelle est la différence entre R et r ? Car dans le I)1 vous utilisez R et dans le I)2 et I)3 vous utilisez r, alors que pour moi ils représentent tous les deux le rayon, que ce soit r ou R.

On utilise r pour une variable, et R pour une constante, pour aider à les différencier. Dans le cerceau filiforme, les points M, qui sont porteurs des éléments de masse dm, sont uniquement localisés sur le périmètre du cercle formant le cerceau. Ainsi, r est constant, c'est le Rayon du cerceau, et on l'appelle R. Dans le disque par exemple, les éléments de masse sont présents de 0 à R, donc r est une variable, ce n'est pas que le Rayon du disque, et on garde r.

La fonction y n'est pas toujours la même selon les exercices, comment cela se fait-il ? Par exemple, $y = R\sin\theta$ en I)1., mais différent dans les exercices d'après.

La coordonnée y doit s'accorder avec la géométrie du problème, donc avec le système de coordonnées choisi, le plus approprié au problème dans les différents exercices:

I)1. Ici, les éléments de masse sont répartis sur une forme filiforme (infinitésimalement fine) en forme de demi-cercle de rayon R. On veut représenter où se situent les éléments de masse dm. Ils sont associés aux éléments de longueur d/du demi-cercle. En coordonnées cartésiennes, l'expression du vecteur position des points M porteurs des éléments de masses est **OM** = x**ex** + y**ey** +z**ez**. La figure est dans le plan xOy donc **OM** = x**ex** + y**ey**. Les composantes x et y de ce vecteur sont données en utilisant l'angle theta de la figure: x = R cos(theta) et y = R sin(theta).

I)2. Ici les éléments de masse sont répartis sur tout le demi-disque. Le point M n'est plus, comme dans le cas précédent, localisé sur le périmètre du demi-disque, mais de r = 0 à R et theta = 0 à pi. Donc l'expression de y précédente devient y = r sin(theta).

I)3. Comme nous sommes sur une sphère le plus simple est d'utiliser les coordonnées sphériques. Vu la symétrie du problème, xG = zG = 0. Il n'y a plus que yG à déterminer. Les relations entre coordonnées cartésiennes et coordonnées sphériques de **OM** sont:

x = r sin(theta) cos(phi)

y = r sin(theta) sin(phi)

z = r cos(theta)

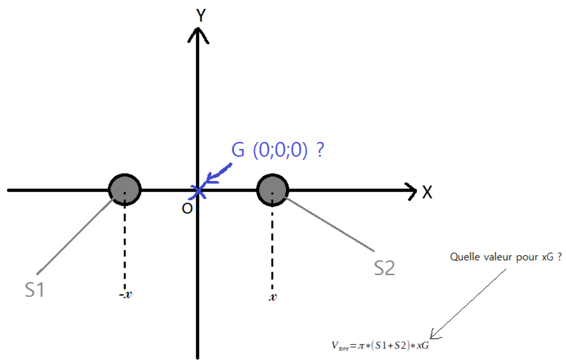
où seule la variable y nous intéresse par symétrie du problème.

Est-il possible d'utiliser le théorème de Guldin sur un système comprenant 2 pièces en rotation autour d'un axe mais détachées entre elles?

Oui bien sûr, d'ailleurs c'est assez simple à voir : imaginons deux disques comme celui de l'exercice II)1, distants de y (le long de Oy donc). S'ils tournent de 2p autour de Oy, on obtient deux tores et le volume est double. C'est d'ailleurs ce qu'on utilise dans l'exercice II)2, où le solide est composé de plusieurs.
La précaution à prendre est que l'axe de rotation ne doit pas traverser les solides.

Afin de mieux expliciter mon problème, je vais utiliser l'exemple du calcul du volume du tore (II.1):
Si j'ai bien compris la réponse précédente, on pourrait tout aussi bien considérer un système constitué de deux disques distants cette fois de x (selon l'axe Ox) pour calculer le volume. On pourrait aussi considérer que les disques effectuent une rotation de seulement 180° autour de l'axe Oy, ils formeront un tore complet à eux deux (une moitié formée par chaque disque). On pourrait alors utiliser le théorème de Guldin: $V = \theta\ S\ x_G$ avec $\theta = 180°$, S la surface totale des deux disques et G le barycentre du système. Mais si G est le barycentre du système {les deux disques}, alors on aurait par symétrie $x_G = 0$ (j'espère ne pas me tromper). Évidemment, ce n'est pas la bonne réponse car on aurait $V = 0$. Il faudrait donc utiliser l'abscisse du barycentre de l'un des deux disques. Mais en faisant ainsi, on ne prend pas le barycentre du système ...
Ma question est donc: dans un système constitué de deux solides non-attachés, quel barycentre faut-il utiliser dans la formule de Guldin ?

Oui et non. La question nécessite un éclaircissement sur « x le long de Ox », car il y a deux cas de figures.
Premier cas, si les deux disques sont disposés de manière symétrique par rapport à l'axe Oy comme sur la figure ci-dessous, alors effectivement, le barycentre de l'ensemble est localisé en $x_G = 0$. De fait cela est incohérent puisque le volume que formerait la rotation de π de ces deux disques autour de Oy ne serait pas nul, et le théorème de Guldin serait invalidé.
En fait, dans ce cas, l'axe Oy traverse le système (les deux disques) que l'on fait tourner, et donc le théorème de Guldin n'st pas applicable. Il faut penser à cela car c'est l'hypothèse de départ de Guldin.
Deuxième cas, si les deux disques se retrouvent entièrement, par exemple du côté droit de l'axe Oy. Alors, si la rotation est seulement de π, avec une position initiale des disques dans le plan xOy, le centre de masse G du système n'est plus dans le plan de la feuille de TD, mais sur l'axe Oz, et il faut trouver z_G. On pourrait aussi bien décider de faire tourner les deux disques de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ autour de Oy de façon à obtenir un centre de masse de nouveau sur Ox.
Imaginons donc le premier disque comme dans l'énoncé du TD, avec son centre à une distance a de l'axe Oy, et le deuxième disque avec son centre à b de Oy, avec $b-a = x$ et $x > 2R$. Les volumes des deux demi-tores engendrés par rotation de π valent alors π^2R^2a (la moitié du volume du premier tore) et π^2R^2b respectivement. Le volume du système total est donc $\pi^2R^2(a+b)$.
D'ailleurs, comme le volume des deux tores complets serait $2\pi^2R^2(a+b)$, le théorème de Guldin donne alors $2\pi^2R^2(a+b) = 2\pi\ S\ x_G$ avec $S = 2\pi R^2$, et donc $x_G = (a+b)/2$, ce que l'on aurait pu imaginer facilement sans calcul.



-II)2.

Comment déterminer l'abscisse du centre de masse du demi-disque (x) ? Faut-il utiliser le résultat trouvé sur le demi-cerceau à l'exercice 1?

Il faut effectivement utiliser le résultat obtenu sur le demi-disque (par le demi-cerceau) de l'exercice I)2. En I)2, on obtient un centre de masse localisé à une distance 4R/3π de la base du demi-disque. Dans le problème II)2, la gorge de la poulie est de rayon a, et par conséquent le centre de masse du demi-disque correspondant est à 4a/3π du rayon R de la poulie. La distance de ce centre de masse à l'axe de rotation est donc R-4a/3π (voir dessin de la correction).