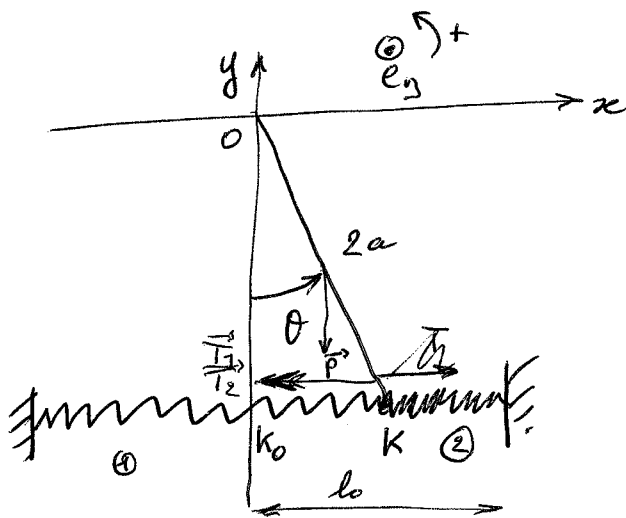


Dynamique

I)



système: plaque

Inventaire des forces

- Forces de rappel des ressorts
- poids des ressorts = 0
- poids de la plaque: mg

x est l'extrémité mobile de chaque ressort, et K_0 la position de cette extrémité lorsque le ressort est au repos: $l = l_0$.

donc $\vec{T}_1 = -k \vec{K_0 K}$ et $\vec{T}_2 = -k \vec{K_0 K}$

$$\rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -2k \vec{K_0 K}$$

$$\vec{K_0 K} = 2a \sin \theta \vec{e}_x \rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -4ak \sin \theta \vec{e}_x$$

Ici, m^{vr} de rotation $\rightarrow$ le + simple à utiliser est le théorème du moment cinétique:

$$\sum \mathcal{M}_A = I_A \ddot{\theta} \quad \Delta = (O, \vec{e}_2)$$

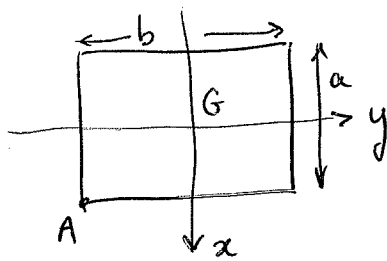
$$\mathcal{M}_{O_2}(\vec{p}') = -mga \sin \theta \quad \left(\text{car } \theta = 0 \rightarrow \text{signe } \ominus \right)$$

poids en $\frac{2a}{2}$

$$\mathcal{M}_{O_2}(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) = -4ak \sin \theta \cdot 2a \cos \theta = -8a^2 k \cos \theta \sin \theta$$

$$\rightarrow I_{O_2} \ddot{\theta} = -mga \sin \theta - 8a^2 k \cos \theta \sin \theta$$

I_{Oz} peut se calculer à l'aide des résultats de TD :



on avait $I_{Gx} = \frac{mb^2}{12}$

$\rightarrow I_{Ax} = I_{Gx} + m \frac{b^2}{4}$ (Huyghens)

$\rightarrow I_{Ax} = \frac{mb^2}{3} = \frac{4}{3}ma^2$ ($b \leftrightarrow 2a$)
(iii)

$\rightarrow \frac{4}{3}ma^2 \ddot{\theta} + (mga + 8a^2k \cos \theta) \sin \theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{3}{4} \left(\frac{mg + 8ak \cos \theta}{ma} \right) \sin \theta = 0$

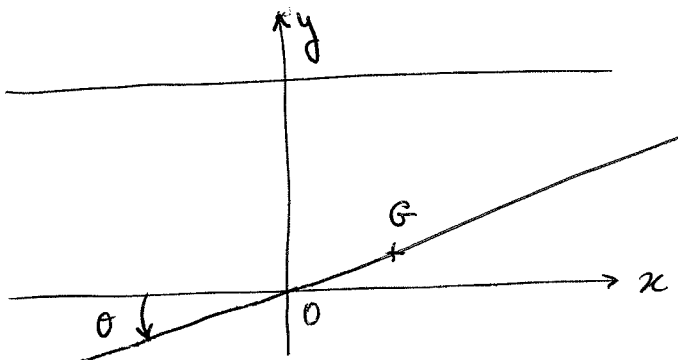
petites oscillations $\rightarrow \cos \theta = 1, \sin \theta \approx \theta$

$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3}{4} \left(\frac{mg + 8ak}{ma} \right) \theta = 0$

$\rightarrow \theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{4} \left(\frac{mg + 8ak}{ma} \right)}$

II)



$\odot \vec{e}_z \uparrow \oplus$

système : barre

théorème de l'énergie cinétique :

$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$ forces appliquées
au système : extérieurs

- Forces:
- poids $\vec{P}$ en G
 - Réact du support en O
 - Rappel du ressort en A : $\vec{T}(A)$
 - force d'amortissement en B : $\vec{F}(B)$

$$E_c = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 \quad \text{rotat / axe fixe}$$

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = m \vec{g} \cdot \vec{r}(G)$$

$$\vec{OG} = L \cos \theta \vec{e}_x + L \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{v}(G) = -L \sin \theta \cdot \dot{\theta} \vec{e}_x + L \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y$$

$$m \vec{g} = -mg \vec{e}_y$$

$$\mathcal{S}(\vec{P}) = -mg L \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\mathcal{S}(\text{réact}) = 0 \quad \text{car articulation parfaite}$$

$$\mathcal{S}(\vec{T}(A)) = \vec{T}(A) \cdot \vec{v}(A)$$

$$\vec{T}(A) = k \overrightarrow{KO} \vec{e}_y = k(l - l_0) \vec{e}_y$$

$$l = l_0 + L \sin \theta \quad \text{avec } l_0 - l_0 = \Delta l \quad (\text{charge initiale du ressort})$$

$$\vec{T}(A) = k(\Delta l + L \sin \theta) \vec{e}_y$$

$$\vec{v}(A) = -\vec{v}(G) = L \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x - L \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\mathcal{S}(\vec{T}(A)) = -k \dot{\theta} L \cos \theta (\Delta L + L \sin \theta)$$

$$\mathcal{S}(\vec{F}(B)) = \vec{F}(B) \cdot \vec{v}(B)$$

$$= -\alpha \vec{v}(B) \cdot \vec{v}(B) = -\alpha v^2(B)$$

$$v^2(B) = (3L \dot{\theta})^2$$

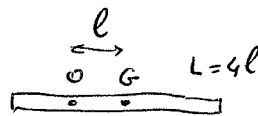
$$\mathcal{P}(\vec{F}(B)) = -g \alpha L^2 \dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} I_A \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} I_A \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} I_A \cdot 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ &= I_A \cdot \dot{\theta} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

$$\rightarrow I_A \ddot{\theta} = -mgL \dot{\theta} \cos \theta - k \dot{\theta} (L + L \sin \theta) \cos \theta - g \alpha L^2 \dot{\theta}^2$$

$$I_A = ?$$

pour une barre de longueur L : $I_{O_G} = \frac{1}{12} m L^2$



$$I_{O_G} = \frac{1}{12} m L^2 + m l^2 \quad (\text{Huygens})$$

$$= m \left(\frac{16}{12} l^2 + l^2 \right)$$

$$= \frac{7}{3} m l^2$$

$$\text{ici } l = L \Rightarrow I_{O_G} = \frac{7}{3} m L^2$$

$$\rightarrow \frac{7}{3} m L \ddot{\theta} = -mg \dot{\theta} \cos \theta - k \dot{\theta} (L + L \sin \theta) \cos \theta - g \alpha L^2 \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\frac{7}{3} m L \ddot{\theta} + (mg \cos \theta + k(L + L \sin \theta) \cos \theta) \dot{\theta} + g \alpha L \dot{\theta}^2 = 0}$$

à l'horizontale, $\theta = 0$, et à l'équilibre: $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$

$$mg + k \Delta L = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{k = -\frac{mg}{\Delta L}}$$

Cette condition satisfait:

$$\frac{7}{3} m \cancel{L} \ddot{\theta} + 9 \alpha \cancel{L} \dot{\theta} + k \cancel{L} \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\frac{7}{3} m \ddot{\theta} + 9 \alpha \dot{\theta} + k \sin \theta \cos \theta = 0$$

qd $\theta \rightarrow 0$:

$$\boxed{\frac{7}{3} m \ddot{\theta} + 9 \alpha \dot{\theta} + k \theta = 0} \quad \text{qui se résout}$$

Le mvf est amorti, avec une décroissance exponentielle.

Il faut connaître les valeurs numériques pour savoir si on a un régime critique, pseudo-périodique ou apériodique.

Dynamique

III 1°) On choisit la 3^e méthode : $\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_{\text{non-cons.}}$

Bilan des forces : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Poids des barres, tension ressort : conservatives} \\ \rightarrow E_p \\ \text{réact sans frottement : } \mathcal{P} = 0 \\ \text{Force d'amortissement, force appliquée en B :} \\ \text{non conservatives} \end{array} \right.$

$$E_c = E_c(OA) + E_c(AB) + E_c(CB)$$

$$OA \text{ et } CB \text{ en rotat \textit{ion} \text{ sur } \text{un} \text{ axe fixe} \Rightarrow E_c(OA) = \frac{1}{2} I_{OA} \dot{\theta}^2$$

$$I_{OA} = \frac{1}{3} ML^2$$

elles ont le m^{ême} m^{ouvement}, l'angle de CB $\text{par rapport à l'horizontale} = \theta$

$$\rightarrow E_c(CB) = \frac{1}{2} I_{CB} \dot{\theta}^2$$

$$I_{CB} = \frac{1}{3} ML^2$$

$$AB \text{ est en translation} \Rightarrow E_{AB} = \frac{1}{2} M v_{AB}^2$$

$$\text{avec } v_{AB} = v_A, \quad v_A = L \dot{\theta} \quad \text{puisque A tourne}$$

$$\rightarrow E_{AB} = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 + ML^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$\boxed{E_c = \frac{5}{6} ML^2 \dot{\theta}^2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k(l-l_0)^2 + \underbrace{E_p(OA) + E_p(CB) + E_p(AB)}_{\text{pesanteur}}$$

$$l = d - L \sin \theta$$

On prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur

$$\text{lorsque } \theta = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_p(OA) = Mg \frac{L}{2} \sin \theta \\ E_p(CB) = Mg \frac{L}{2} \sin \theta \\ E_p(AB) = Mg L \sin \theta \end{array} \right.$$

$$E_p(\text{pesanteur}) = 2Mg L \sin \theta$$

$$E_p = \frac{1}{2} k (d - L \sin \theta - l_0)^2 + 2Mg L \sin \theta$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{5}{3} ML^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + k (d - L \sin \theta - l_0) (-L \dot{\theta} \cos \theta) + 2Mg L \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}(A)) + \mathcal{P}(\vec{F}(B))$$

$$\vec{F}(A) = -\alpha \vec{v}(A) \rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}(A)) = -\alpha v(A)^2 = -\alpha L^2 \dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(B) &= \vec{F}_0 \sin \omega t \rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}(B)) = \vec{F}(B) \cdot \vec{v}(B) \\ &= -F_0 \sin \omega t \vec{e}_y = \vec{F}(B) \cdot \vec{v}(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(A) &= \frac{d\vec{OA}}{dt} = \frac{d}{dt} (L \cos \theta \vec{e}_x + L \sin \theta \vec{e}_y) \\ &= -L \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + L \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}(B)) = -F_0 L \dot{\theta} \sin \omega t \cos \theta$$

l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{5}{3} ML^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + k (d - L \sin \theta - l_0) (-L \dot{\theta} \cos \theta) + 2Mg L \dot{\theta} \cos \theta = -\alpha L^2 \dot{\theta}^2 - F_0 L \dot{\theta} \sin \omega t \cos \theta$$

petites oscillations: $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$

$$\rightarrow \frac{5}{3} M L^2 \ddot{\theta} + k(d - L\theta - l_0)(-L) + 2MgL = -\alpha L^2 \dot{\theta} - F_0 L \sin \omega t$$

à l'équilibre, $\theta = 0 \rightarrow \dot{\theta} = 0 \quad \ddot{\theta} = 0$

$$\rightarrow 2MgL - kL(d - l_0) = 0$$

$$\rightarrow 2Mg - k(d - l_0) = 0 \quad \rightarrow 2MgL = kL(d - l_0)$$

l'équation devient:

$$\frac{5}{3} M L^2 \ddot{\theta} + \alpha L^2 \dot{\theta} + k L^2 \theta = - F_0 L \sin \omega t$$

$$\frac{5}{3} M \ddot{\theta} L + \alpha L \dot{\theta} + k L \theta = - F_0 \sin \omega t$$

$$\frac{5}{3} M \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + k \theta = - \frac{F_0}{L} \sin \omega t$$

2) Pour résoudre l'équation, on la met sous la forme:

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{5M} \dot{\theta} + \frac{3k}{5M} \theta = - \frac{3F_0}{5ML} \sin \omega t$$

qui est de la forme:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta \omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t$$

avec

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{3k}{5M}} = 990 \left(\frac{N}{m \cdot kg} \right) \stackrel{\left(\frac{rd}{s} \right)^2}{=} \rightarrow \omega_0 = 31,45 \text{ rad s}^{-1}$$

$$2 \xi \omega_0 = \frac{3d}{5M} \rightarrow \boxed{\xi = \frac{3d}{10M \omega_0}} = 0,3 \frac{N s^2}{m kg rd} = \frac{Ns}{m kg} \cdot \frac{s}{rd}$$

$$\omega_0^2 \theta_0 = \frac{-3F_0}{5ML} \rightarrow \theta_0 = \frac{-3F_0}{5ML} \cdot \frac{5M}{3k}$$

$$\boxed{\theta_0 = \frac{-F_0}{kL}} = -2,52 \cdot 10^{-2} \text{ rd} = -1,45^\circ$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 G \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{F_0}{kL} G \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{F_0}{kL} G \sin(\omega t + \varphi + \pi) \end{aligned}$$

$$\text{avec } G = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2}}$$

$$\text{et } \tan \varphi = \frac{2\xi \omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

l'amplitude des oscillations est donc $\overbrace{2,52 \cdot 10^{-2} G}^{\theta_0}$, et dépend de ω .

Il y a possibilité de résonance car $\xi = 0,3 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

pour la fréquence: $f = f_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - 2\xi^2} = 4,5 \text{ Hz}$$

Le mov vertical de A est décrit par $y(A)$:

$$y(A) = L \sin \theta \simeq L \theta$$

$$= \frac{F_0 G}{k} \sin(\omega t + \varphi + \pi)$$

à la résonance, $G = G_{\max}$ ($\omega = 2\pi f = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$)

$$G(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2(1 - 2\xi^2) - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2(1 - 2\xi^2)}}$$

$$= \omega_0^2 / \left(4\xi^4\omega_0^4 + 4\xi^2\omega_0^4 - 8\xi^4\omega_0^4\right)^{1/2}$$

$$= \omega_0^2 / \left(4\xi^2\omega_0^4 - 4\xi^4\omega_0^4\right)^{1/2} = \omega_0^2 / \left(4\xi^2\omega_0^4(1 - \xi^2)\right)^{1/2}$$

$$= \omega_0^2 / 2\xi\omega_0^2\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\rightarrow G_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} = 1,747$$

et donc l'amplitude est: $\frac{F_0 G}{k} = \frac{50 \cdot 1,747}{3300} = 2,65 \text{ cm}$
à la résonance.

3) $t = 2t_0 \rightarrow \omega = 2\omega_0$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\omega_0^2}{\left((4\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2 \cdot 4\omega_0^2 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\omega_0^2}{\left(9\omega_0^4 + 16\xi^2\omega_0^4 \right)^{1/2}} = \frac{1}{(9 + 16\xi^2)^{1/2}} \\ &= 0,309 \end{aligned}$$

l' amplitude angulaire vaut alors : $\frac{2,52 \cdot 10^{-2}}{\theta_0} \cdot \frac{0,309}{6}$

$$= 78 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,45^\circ$$

comme $\omega > \omega_0$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) - 180^\circ \\ &= \arctan \left(\frac{2 \cdot 0,3 \cdot 2\omega_0^2}{4\omega_0^2 - \omega_0^2} \right) - 180^\circ \\ &= -158,2^\circ \end{aligned}$$

IV 1) Système conservatif: $\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{7}{2} g \sin \varphi + 2 \dot{\varphi}^2 \right) = 0$$

$$\frac{7}{2} g \dot{\varphi} \cos \varphi + 4 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{7}{8} g \cos \varphi = 0}$$

équilibre: $\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

2) Équilibre stable: E_p minimum

$$E_p = \frac{7}{2} g \sin \varphi \quad \text{mini pour } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$\rightarrow$ on étudie le mvt autour de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \theta \quad \theta \text{ petit}$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}$$

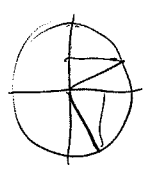
l'équation devient: $\ddot{\varphi} + \frac{7}{8} g \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = 0$

$$\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{7}{8} g \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{7}{8} g \theta = 0 \quad \sin \theta \approx \theta$$

$$\rightarrow \theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{7}{8} g}$$



C.I.:

$$\theta(0) = A \cos \varphi = 0$$

$$\rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\hookrightarrow \sin \varphi = -1$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\theta}(0) = -A \omega_0 \sin \varphi = \omega_i$$

$$\rightarrow A \omega_0 = \omega_i$$

$$A = \frac{\omega_i}{\omega_0}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\omega_i}{\omega_0} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\boxed{\theta = \frac{\omega_i}{\omega_0} \sin \omega t}$$