I.U.T. de CAEN
Mesures Physiques
1ère année

TRAVAUX PRATIQUES DE MÉCANIQUE

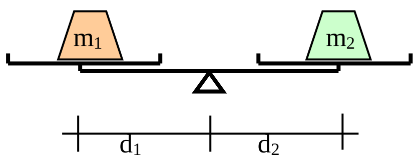
MESURES DE MASSES

CENTRE DE MASSES

Les balances à plateaux, type trébuchet, quoique leur principe soit très ancien, demeurent des instruments de mesure précis, pourvu que l'on utilise la méthode de double pesée. Elles sont encore parfois employées dans certains domaines. Elles sont fiables et ont une durabilité sans limite.
Les balances numériques, beaucoup plus pratiques, sont plus chères et plus fragiles. Elles nécessitent une maintenance régulière pour être fiables.
Dans ce TP, ces deux types de balances seront utilisés. En outre seront exposées deux méthodes de détermination du centre de masse d'un objet.

I-MESURE DE MASSE PAR LA METHODE DE DOUBLE PESEE

1) Pesée simple



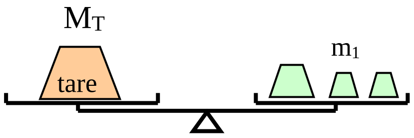
Lors de la réalisation d'un équilibre, le fléau s'immobilise sur une position pour laquelle les moments des poids par rapport à l'axe de rotation sont égaux: $m_1\, g\, d_1 = m_2\, g\, d_2$
(g: intensité du champ de pesanteur)

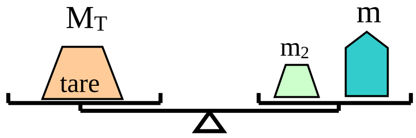
$$m_1\, d_1 = m_2\, d_2$$

Techniquement, il est difficile de réaliser rigoureusement la condition $d_1 = d_2$, donc à l'équilibre, on ne peut affirmer que $m_1 = m_2$. Pour réaliser des mesures précises avec des balances à plateaux, il faut utiliser la méthode de double pesée.

2) Double pesée

Pour mesurer une masse m, on réalise successivement les deux équilibres suivants:





$M_T\, d_1 = m_1\, d_2$ $\qquad$ $M_T\, d_1 = (m + m_2)\, d_2$

La comparaison des deux égalités donne $\boxed{m = m_1 - m_2}$

3) <u>Calcul d'incertitudes</u>

Tout d'abord, il faut évaluer l'incertitude liée à la balance.
A partir de l'un des équilibres précédents, chercher quelle est la plus petite masse à ajouter pour que l'aiguille dévie d'une graduation. Cette masse sera "l'incertitude-type balance" u_B.
De plus, chaque masse marquée est affectée d'une incertitude.

Ainsi si $m_1 = m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_k$

$u_{m1}^2 = u_B^2 + u_{m'1}^2 + u_{m'2}^2 + \ldots + u_{m'k}^2$ (m'_i : masses marquées constituant m_1)

Le constructeur fournit une table d'incertitudes élargies, avec le niveau de confiance 99,7%.
On en déduira les incertitudes-types. Rappel: $U = k.\ u$
Cependant, au lieu de calculer chaque incertitude-type, on pourra mettre en facteur 1/k, et obtenir:

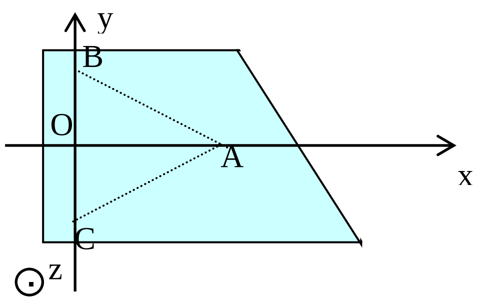
$$u_{m'1}^2 + u_{m'2}^2 + \ldots + u_{m'k}^2 = \frac{1}{k^2}\left(Um'^2_1 + Um'^2_2 + \ldots + Um'^2_k \right)$$

Calculer u_{m1}^2, puis de la même façon u_{m2}^2.
En déduire u_m^2, puis u_m et enfin U_m, en utilisant un facteur d'élargissement égal à 2.

Présenter les calculs et le résultat final de façon détaillée.

<u>II - METHODE GEOMETRIQUE DE DETERMINATION DU CENTRE DE MASSE</u>

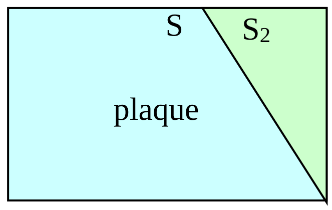
Cette méthode est applicable à un objet homogène de forme simple, une plaque plane, ici.



Sur une face de la plaque sont marqués avec précision 3 points A,B,C, qui définissent un système d'axes Oxy. Le triangle ABC est équilatéral de côtés 2 a:

$AB = BC = CA = 2\ a$ donc $OA = a\sqrt{3}$

Représenter la plaque et les axes Ox et Oy à l'échelle 1 sur une feuille de papier millimétré (la plaque doit rentrer entièrement dans la feuille). Faire les dessins avec soin.



On peut considérer que si on juxtaposait à la plaque une plaque triangulaire de même matière et même épaisseur, on constituerait une plaque rectangulaire.
Nous noterons G_1 le centre de masse du rectangle, G_2 celui du triangle, et G celui de la plaque, m_1, m_2, m les masses respectives.

Les barycentres vérifient les relations (cf. cours de mécanique):

$m_1 \overrightarrow{OG_1} = m\overrightarrow{OG} + m_2 \overrightarrow{OG_2}$ avec $m_1 = m + m_2$ ou encore:

$$m_1 \overrightarrow{G_1G_1} = \vec{0} = m\overrightarrow{G_1G} + m_2 \overrightarrow{G_1G_2}$$

$$\text{soit } \overrightarrow{G_1G} = -\overrightarrow{G_1G_2}\, m_2/m$$

Puisque les plaques sont de même matière et même épaisseur, leurs masses sont dans le même rapport que leurs surfaces: $\frac{m_2}{m} = \frac{S_2}{S}$

S_1 et S_2 se mesurent aisément à partir des dimensions de la plaque et $S = S_1 - S_2$ d'où:

$$\overrightarrow{G_1G} = -\frac{S_2}{S_1 - S_2}\overrightarrow{G_1G_2}$$

Il est facile de tracer G_1 et G_2 (respectivement point d'intersection des diagonales et des médianes); on peut donc déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{G_1G}$ et reporter $\overrightarrow{G_1G}$ sur le dessin.

Tracer ce vecteur en couleur, l'extrémité du vecteur représentant le point G.

III-MESURE DES COORDONNEES DU CENTRE DE MASSE

Cette méthode est applicable à un objet quelconque. Elle est utilisée, entre autres, pour la détermination des centres de masse des avions et des cabines de camions. Nous l'utilisons ici avec la plaque précédente.

1) Principe

La plaque de masse m, de centre de masse G repose en A, B, C sur trois pointes situées dans un plan horizontal. G doit être à l'intérieur du triangle ABC. La plaque est en équilibre sous l'action de son poids et des réactions des pointes R(A), R(B), R(C), (en négligeant la poussée de l'air).
La mesure des réactions permet d'accéder aux coordonnées x et y du point G.
En effet, l'équilibre se traduit par deux équations :

- l) La loi fondamentale de la dynamique:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad m\vec{g} + \vec{R}(A) + \vec{R}(B) + \vec{R}(C) = \vec{0}$$

En projetant sur $\vec{e}_z$, on obtient: $m = \frac{R(A) + R(B) + R(C)}{g}$

- Théorème du moment résultant appliqué en O (cf. cours de mécanique):

$$\sum \vec{M}_o = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}(A) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}(B) + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{R}(C) = \vec{0}$$

Ce qui donne, après calculs: $x = \frac{a\sqrt{3}R(A)}{mg}$ et $y = \frac{a\left(R(B) - R(C)\right)}{mg}$

En pratique, on ne mesure pas les réactions R, mais leur masse équivalente R/g.

2) Manipulation

- Mesurer la masse m de la plaque. Evaluer l'incertitude-type.

- Mesurer la masse M de la pointe mobile. Evaluer l'incertitude-type.

- Mesure des masses exercées aux points A, B, C :
  Poser les points B et C de la plaque sur les pointes du plateau du trépied, le point A sur la pointe mobile placée sur la balance. Vérifier l'horizontalité de la plaque et la verticalité de la point, relever l'indication donnée par la balance, M_A.

  M_A représente la masse de la pointe mobile + la masse équivalente à la force exercée par la plaque au point A: $M_A = M + \frac{R(A)}{g}$

  Tourner la plaque de manière à relever de la même façon M_B et M_C (en vérifiant de nouveau l'horizontalité de la plaque et la verticalité de la pointe).

  Vérifier que $m = M_A + M_B + M_C - 3\ M$.

  Comparer les incertitudes de ces 2 méthodes de mesure de m. Conclusion?

- Mesure de la valeur de a (cf début du II)

Cette mesure sera déduite de celle de la distance entre deux points d'appui (= 2a) = distance entre deux pointes. 2 mesures sont en principe nécessaires pour déterminer la distance entre les deux axes des pointes, utilisant un réglet et un micromètre. Discuter et justifier la méthode utilisée. Calculer a et u_a.

3) Calculs et Incertitudes

Nous avons écrit: $x = \frac{a\sqrt{3}R(A)}{mg}$ et $y = \frac{a(R(B) - R(C))}{mg}$

Or nous n'avons mesuré ni R(A) ni g mais $\frac{R(A)}{g} = M_A - M$; de même pour les points B et C.

A préparer pour le TP, et faire contrôler en séance de TP :

Réécrire les formules donnant x et y en ne faisant apparaître que les quantités mesurées m, a, M, M_A, M_B, M_C.

Calculer les expressions littérales des incertitudes-types relatives de x et de y, en fonction des incertitudes-types des grandeurs mesurées.

4) Présentation des Résultats

Nous prendrons un facteur d'élargissement égal à 2. Présenter les résultats de la façon standard.

Représenter le point G obtenu sur la feuille. Placer le rectangle d'incertitude associé. Comparer avec la première détermination de G.