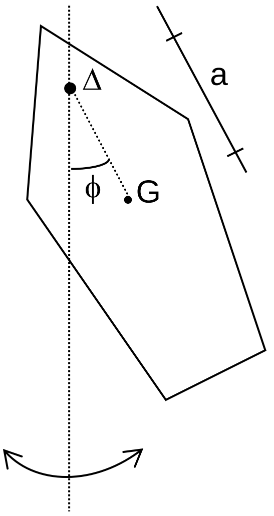
I.U.T. de CAEN
Mesures Physiques
1ère année

TRAVAUX PRATIQUES DE MECANIQUE
PENDULE PESANT

I-RAPPELS THEORIQUES RELATIFS AU PENDULE PESANT



Un pendule pesant est un solide de forme quelconque pouvant tourner autour d'un axe horizontal Δ. L'amortissement dû à l'air étant très faible, on peut considérer qu'il est soumis uniquement à son poids et à la réaction du support. Dans ces conditions, vous verrez en cours de mécanique que le pendule oscille selon un mouvement sinusoïdal de période:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}$$

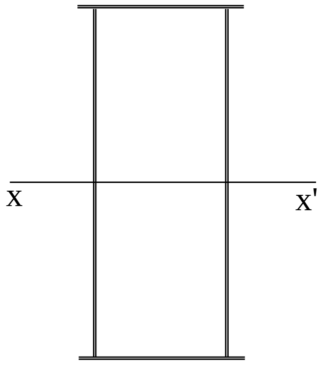
(calcul effectué dans le cadre d'oscillations de faible amplitude)

où M est la masse du pendule.
I est son moment d'inertie par rapport à l'axe; c'est une grandeur qui caractérise l'inertie du pendule pour le mouvement de rotation.
a la distance entre le centre de masse du pendule et l'axe de rotation
g l'intensité du champ de pesanteur

Le moment d'inertie peut donc être mesuré à partir de mesures de périodes. Pour des objets de forme simple, il peut aussi être calculé.
Le but du TP est la mesure du moment d'inertie d'un objet; la valeur trouvée sera ensuite comparée à celle obtenue par le calcul.
En outre ces mesures permettent la détermination de la distance entre le centre de masse du pendule et l'axe de rotation.
Les résultats seront présentés avec un facteur d'élargissement 2.

II-MANIPULATION

Elle consiste à mesurer le moment d'inertie d'un objet (en forme de T) en le plaçant dans le cadre d'un "inertiemètre" dont on aura au préalable mesuré le moment d'inertie. L'appareil se compose d'un cadre rectangulaire susceptible d'osciller autour d'un axe défini par deux tiges filetées portant deux pointes d'écartement réglable, entre lesquelles on place le corps étudié. L'axe x'x par rapport auquel on veut mesurer le moment d'inertie est la droite ainsi définie.



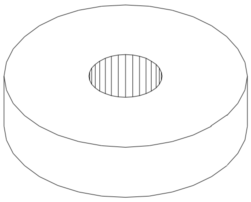
Le cadre est construit de façon parfaitement symétrique par rapport à l'axe d'oscillation; posé sur son support par l'intermédiaire de 4 roulements à billes, il est en équilibre indifférent. L'appareil est livré avec un jeu de masses additionnelles en laiton, qui peuvent être engagées dans les prolongements des petits côtés du cadre.

MODE OPERATOIRE

1)Mesure du moment d'inertie I_0 du cadre:

Après avoir réglé l'horizontalité de l'axe de rotation (niveau à bulle), ajouter deux masses au bas du cadre. Le faire osciller avec une faible amplitude, et mesurer la période T.
Vous pourrez montrer en TD de mécanique que la période a pour expression:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2md^2 + m(R_1^2 + R_2^2)}{2mgd}}$$



Rayon intérieur R_1
Rayon extérieur R_2

m est la masse des cylindres évidés représentés ci-contre, ou plus exactement leur moyenne; en pratique, vous pèserez directement $m_1 + m_2 = 2m$ la somme des deux masses.

d est la distance de l'axe de rotation x'x à l'axe de chacune des branches horizontales du cadre.

On en déduit l'expression du moment d'inertie du cadre:

$$\boxed{I_0 = md(\frac{gT^2}{2\pi^2} - 2d) - m(R_1^2 + R_2^2)}$$

Détailler les mesures et leurs incertitudes. Le résultat sera donné en unités SI (à déterminer sur l'équation).

Calcul de l'incertitude U_{I_0} :

Le calcul n'est pas difficile, vous pouvez vous entraîner à le retrouver. La différentiation de I_0 par rapport à ces variables donne:

$$dI_0 = \left(\frac{I_0}{m}\right) dm + \left(\frac{mgT^2}{2\pi^2} - 4md\right) dd + \frac{mgdT}{\pi^2} dT - 2m\ (R_1 dR_1 + R_2 dR_2) + \frac{mdT^2}{2\pi^2} dg$$

soit, avec $u_{R_1} = u_{R_2}$:

$$u_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{I_0}{m}\right)^2 u_m{}^2 + \left(\frac{mgT^2}{2\pi^2} - 4md\right)^2 u_d{}^2 + \left(\frac{mgdT}{\pi^2}\right)^2 u_T{}^2 \ldots \quad \ldots + 4m^2\ \left(R_1{}^2 + R_2{}^2\right) u_R{}^2 + \left(\frac{mdT^2}{2\pi^2}\right)^2 u_g{}^2}$$

Évaluer séparément chacune des contributions. Classer les mesurandes selon leur contribution: quelles mesures devrait-on améliorer pour une meilleure précision?

2) Mesure du moment d'inertie d'un corps quelconque S, et détermination de la position de son centre de masse:

- Retirer les deux masses. Mesurer la masse M du té, puis le placer dans l'inertiemètre entre les pointes suivant l'axe x'x. Serrer les rondelles contre le té de façon qu'il reste immobile dans le plan du cadre lors des oscillations. Faire osciller le système avec une faible amplitude (2 cm au bas du cadre). On mesure une période T_1.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I}{Mga}}$$

avec I moment d'inertie du té

a distance de son centre de masse à l'axe x'x

Cette équation introduisant une inconnue supplémentaire, a, il faut obtenir une deuxième équation.

- Replacer les masses au bas du cadre et mesurer, comme précédemment, la période T_2 des oscillations:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I + 2md^2 + m(R_1{}^2 + R_2{}^2)}{Mga + 2mgd}}$$

La manipulation de ces deux équations permet d'obtenir les expressions de I et de a:

$$I = \frac{T_1{}^2}{T_2{}^2 - T_1{}^2}\left(2md^2 + m\ (R_1{}^2 + R_2{}^2) - T_2{}^2 \frac{mgd}{2\pi^2}\right) - I_0 \quad \text{et} \qquad a = 4\pi^2 \frac{I_0 + I}{MgT_1{}^2}$$

Les calculs seront faits à l'ordinateur, à l'aide d'un programme sur tableur fourni. Il vous suffira de saisir les données de mesure, en unités SI.

3) Calcul des incertitudes

Les calculs sont laborieux car dans les expressions ci-dessus, I, a et I_0 ne sont pas des variables indépendantes, puisqu'elles sont calculées à partir des mêmes variables de mesure. Il faut, dans I remplacer I_0 par son expression de la page 2, et dans a remplacer I_0 + I par son expression de la page 3.
Nous donnons ci-après les résultats, que vous pouvez vérifier à titre d'exercice.
Les calculs numériques sont préparés sur le fichier de calcul.

a) Moment d'inertie I:

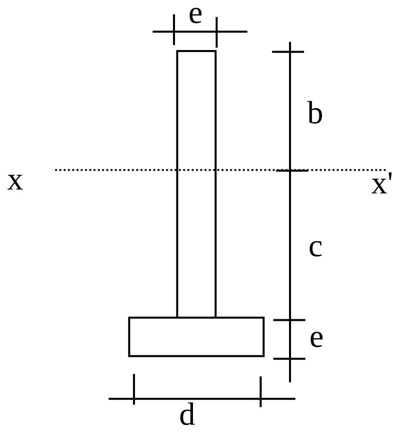
$$u_I = \sqrt{\begin{gathered}\left(\frac{4mdT_2{}^2}{T_2{}^2-T_1{}^2}-\frac{mg}{2\pi^2}\left(T^2+\frac{T_1{}^2T_2{}^2}{T_2{}^2-T_1{}^2}\right)\right)^2 u_d^2+\left(\frac{md}{2\pi^2}\left(T^2+\frac{T_1{}^2T_2{}^2}{T_2{}^2-T_1{}^2}\right)\right)^2 u_g^2+\cdots\\ \left(\frac{2mT_2{}^2}{T_2{}^2-T_1{}^2}\right)^2\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)u_R^2+\left(\frac{mgdT}{\pi^2}\right)^2 u_T^2+\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{m}}\right)^2 u_m^2+\cdots\\ \left(\frac{2T_1T_2{}^2}{\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)^2}\right)^2\left(2md^2+m\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)-\frac{mgd}{2\pi^2}T_2{}^2\right)^2 u_{T_1}^2+\cdots\\ \left(\frac{2T_1{}^2T_2}{\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)^2}\right)^2\left(\frac{mgd}{2\pi^2}T_1{}^2-2md^2-m\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)\right)^2 u_{T_2}^2\end{gathered}}$$

b) abscisse du centre de masse a:

$$u_a = \sqrt{\begin{gathered}\left(\frac{4\pi^2 m}{Mg\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)}\right)^2\left(4d-\frac{T_2{}^2g}{2\pi^2}\right)^2 u_d^2+\left(\frac{8\pi^2 m}{Mg\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)}\right)^2\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)u_R^2+\cdots\\ \left(\frac{4\pi^2}{Mg^2\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)}\right)^2\left(2md^2+m\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)\right)^2 u_g^2+\cdots\\ \left(\frac{a}{m}\right)^2 u_m^2+\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{M}}\right)^2 u_M^2+\cdots\\ \left(\frac{8\pi^2T_1}{Mg\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)^2}\right)^2\left(2md^2+m\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)-\frac{mgd}{2\pi^2}T_2{}^2\right)^2 u_{T_1}^2+\cdots\\ \left(\frac{8\pi^2T_2}{Mg\left(T_2{}^2-T_1{}^2\right)^2}\right)^2\left(\frac{mgd}{2\pi^2}T_1{}^2-2md^2-m\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)\right)^2 u_{T_2}^2\end{gathered}}$$

4) Détermination géométrique du moment d'inertie I

Le moment d'inertie peut être calculé à partir de la masse et des dimensions de l'objet.
Nous donnons ici le résultat du calcul:



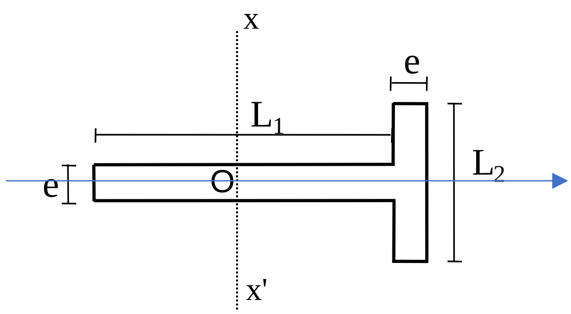
$$I = \frac{1}{3}\frac{M}{(b+c+d)}\left(b^3 + c^3 + 3c^2d + 3cde + de^2\right)$$

Mesurer b, c, d, e et calculer I.
On ne fera pas le calcul d'incertitude

5) Détermination géométrique de la position de G:

On décompose l'objet en 2 barres rectangulaires ; G sera cherché comme le barycentre des centres de masses des deux barres, G_1 et G_2.

En prenant l'origine O sur l'axe de rotation, donner l'expression de $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}_1, \overrightarrow{OG}_2$ et des dimensions de l'objet (l'objet étant homogène et d'épaisseur constante, la relation des barycentres en fonction des masses s'écrit finalement en fonction des surfaces).
En déduire la relation entre a, a_1 et a_2, leurs projections sur l'axe de symétrie du té, qui représentent des distances (en valeurs algébriques) de l'axe de rotation aux centres de masse respectifs. Mesurer a_1 et a_2 et en déduire a.



Matériel:

- Cellule photoélectrique (position Kater)
- Périodemètre
- Inertiemètre + 2 masses de 100 g (+ niveau)
- Objet en forme de té
- Pied à coulisse, réglet