I.U.T. de CAEN
Mesures Physiques
1ère année

TRAVAUX PRATIQUES DE MECANIQUE

MESURES DE LA RAIDEUR D'UN RESSORT

I- PRINCIPES

Soit l_0 la longueur d'un ressort à boudin suspendu verticalement, et l sa longueur à l'équilibre lorsqu'on exerce à son extrémité libre une force verticale F. La "raideur" du ressort est le coefficient k tel que :

$$F = k\,(l-l_0)$$

Elle s'exprime en N/m. Cette relation est valable dans le domaine d'allongement élastique si les spires ne sont pas jointives à l'état de repos.

1) Mesure statique de la raideur

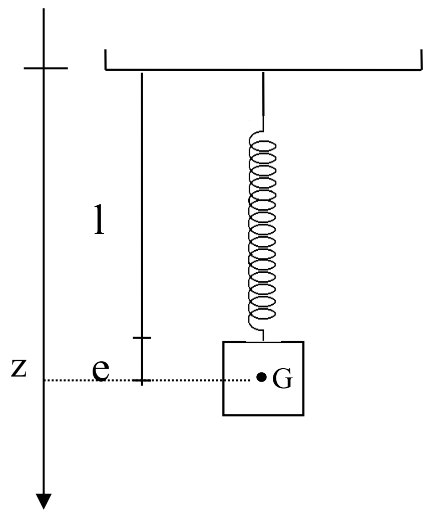
L'allongement $l-l_0$ du ressort est donc proportionnel à la force appliquée c.à.d. que le graphe F(l) est une droite de pente k, qui peut se mesurer graphiquement.

En pratique, le ressort sera suspendu au plateau d'une balance, et son extrémité inférieure solidaire de l'index d'une règle graduée (voir fig. p.3). Pour différents étirements mesurés, on lira la masse affichée par la balance; en effet, la force exercée par le ressort est équivalente à un poids posé sur la balance, et convertie par celle-ci en masse; on mesure en fait des masses et non des forces.

2) Méthode dynamique

Le ressort est suspendu à un support, une masse m est accrochée à son extrémité inférieure et mise en mouvement vertical. Dans le calcul qui suit, nous négligeons la masse du ressort devant celle qui lui est accrochée, ainsi que l'amortissement dû à l'air.

La masse est soumise à son poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ (g l'intensité du champ de pesanteur), et à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_z$ (vérifier le signe).



L'équation du mouvement de la masse est donc (théorème du centre de masse):

$$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z}\text{, ici } l = z - e$$

$$mg - k(z - e - l_0) = m\ddot{z}$$

$$m\ddot{z} + k(z - e - l_0 - mg/k) = 0$$

Posons: $Z = z - e - l_0 - mg/k$

alors: $\ddot{Z} = \ddot{z}$

L'équation s'écrit: $m\ddot{Z} + k\ Z = 0$

Soit : $\ddot{Z} + Z\,k/m = 0$

Les solutions de cette équation sont de la forme:

$Z = A\sin(\omega t + \phi)$ avec $\omega^2 = k/m$
(cf cours de maths2)

Le ressort a donc un mouvement sinusoïdal de période:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

De la mesure de m et de T, on peut déduire la valeur de k.
Pour plus de précision, on calculera k à l'aide d'une mesure de pente. En effet, la relation ci-dessus s'écrit: $T^2 = 4\pi^2\, m/k$; pour différentes masses accrochées, on mesure la période d'oscillation. La droite $T^2(m)$ a pour pente $a = 4\pi^2/k$. La mesure de cette pente permettra donc d'obtenir k.

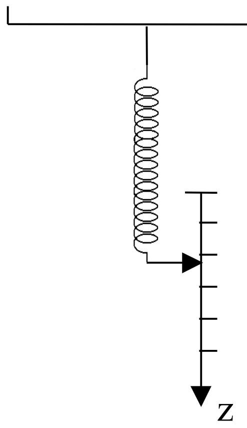
Préparation :

Faire les calculs d'incertitudes relatives de k à partir des 2 expressions :
$k = \frac{(m_2 - m_1)}{(l_2 - l_1)}g$ et $k = 4\pi^2\frac{(m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)}$ par la méthode de la différentielle logarithmique, toutes les grandeurs intervenant dans ces expressions étant indépendantes.

II-MANIPULATION

1-Mesure statique

Vérifier l'horizontalité de la balance (niveau à bulle).
Allumer la balance (à vide) : affichage: 0,000 g.



Accrocher le ressort sous la balance; puis, fixer son extrémité inférieure à l'index de la règle (qui est en fait un pied à coulisse muni d'un support), en étirant très légèrement le ressort et en veillant à la verticalité du ressort.
Noter l'abscisse initiale z_0.

Attendre que l'affichage soit stabilisé et relever la valeur m_0.
Prendre une dizaine de points de mesure (z,m) en étirant progressivement le ressort, tout en veillant à ne pas l'étirer de plus d'une fois sa longueur ($l \leq 2l_0$). Laisser le ressort dans sa position finale environ 15 minutes, pendant lesquelles vous tracerez le graphe m(z) sur un tableur. Relâcher progressivement le ressort en reprenant des mesures pour 2 abscisses déjà relevées et pour l'abscisse de départ. Que constatez-vous? Vous pouvez ainsi mettre en évidence un phénomène d'hystérésis.

La raideur du ressort $k = \dfrac{dF}{d(l - l_0)} = \dfrac{dm}{dz} g$. La pente $\dfrac{dm}{dz}$ sera calculée à partir d'un programme de régression linéaire. Noter le coefficient de corrélation.
La valeur de g devra être choisie de façon à ne pas nuire à la précision des mesures; pour cela, on évaluera au préalable les différentes contributions aux incertitudes. Le calcul sera fait sur l'incertitude-type relative $\dfrac{uk}{k}$ obtenue à partir de la relation de définition $k = \dfrac{\Delta F}{\Delta(l - l_0)} = \dfrac{(m_2 - m_1)}{(l_2 - l_1)} g$ (cf travail préparatoire), m_1 et m_2 les masses extrêmes mesurées, l_1 et l_2 les allongements correspondants. L'incertitude sur g correspond dans ce calcul à une erreur d'arrondi, que l'on devra rendre suffisamment petite pour que sa contribution à l'incertitude soit non significative (voir enseignant).
Le résultat sera présenté avec un facteur d'élargissement 2.

2-Mesure dynamique

Accrocher le ressort sur le support et accrocher au ressort une masse à crochet (ne pas étirer le ressort de plus d'une fois sa longueur). Installer le capteur photoélectrique de façon à ce que la masse à l'équilibre occulte la moitié du faisceau.
Mettre la masse en oscillation de très faible amplitude (le rayon du tube), en évitant soigneusement tout mouvement latéral, et mesurer la période, après avoir vérifié que les réglages du périodemètre sont ceux indiqués sur la notice d'utilisation. Calculer son écart-type. Mesurer la masse utilisée.
Recommencer avec d'autres masses de la boîte.
Tracer le graphe $T^2(m)$ pour éliminer les éventuels points erronés, puis calculer la pente et l'ordonnée à l'origine par un programme de régression linéaire. Ne pas oublier les unités de ces coefficients. Noter le coefficient de corrélation.

On trouve donc $T^2 = a\,m + b$; or on a vu au §I-2 : $T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$. On remarque qu'il apparaît expérimentalement une ordonnée à l'origine qui n'était pas prévue par le calcul du § I-2. Cela n'invalide pas le calcul de la pente qui s'identifie à $\frac{4\pi^2}{k}$ et qui permet d'obtenir k. On fera attention aux conversions d'unités.
Pour le calcul d'incertitude, on utilisera la relation de définition de k, en considérant les valeurs extrêmes mesurées:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} m \quad \Leftrightarrow \quad k = 4\pi^2 \frac{(m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)} \text{ (cf préparation)}$$

Calculer u_k en fonction de u_{m1}, u_{m2}, u_{T1}, u_{T2}, en déduire u_k, et Uk, avec un facteur d'élargissement 2.
Comparer les deux valeurs de k obtenues.

Remarque:
D'après le calcul du § I-2, la droite $T^2(m)$ devrait passer par l'origine. En pratique, on ne le constate pas car une partie du ressort oscille, ce qui n'a pas été pris en compte dans l'approche théorique. Le problème est difficile à traiter en théorie, mais on peut modéliser la situation en considérant qu'une partie de la masse du ressort, μ, s'ajoute à la masse oscillante m.

La relation devient: $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m+\mu)$. La pente est inchangée, cette modélisation permet d'expliquer l'existence d'une ordonnée à l'origine, $b = \frac{4\pi^2}{k}\mu = a\,\mu$. On déterminera μ, que l'on comparera à la masse du ressort (à mesurer), en évaluant le rapport $\frac{\mu}{m}$.

MATERIEL UTILISE

- balance de précision
- pied à coulisse monté verticalement sur un support
- un support de ressort
- une boîte de masses à crochet
- périodemètre, capteur photoélectrique
- plateau réglable