IUT de Caen **24 Janvier 2004**
Département de Mesures Physiques **8h30-11h30**

Mécanique
Corrections

1: Moment d'inertie d'un tube

On utilisera les coordonnées cylindriques, avec Oz axe de révolution du tube.

On a $I_{oz} = \int d^2\, dm$, avec d = r

En coordonnées cylindriques:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$I_{oz} = \rho \int_{r_1}^{r_2} r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_o^{\ell} dz = \rho\, \pi\, \ell\, (r_2^4 - r_1^4) / 2$$

et

$$m = \rho \int_{r_1}^{r_2} r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_o^{\ell} dz = \rho\, \pi\, \ell\, (r_2^2 - r_1^2)$$

soit

$$I_{oz} = m(r_2^4 - r_1^4) / 2(r_2^2 - r_1^2) \text{ ou encore } I_{oz} = m(r_2^2 + r_1^2) / 2$$

2: Roulement d'un tube sur plan incliné

21: La relation du champ des vitesses s'écrit:

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(O_1) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1 I}$$
$$= \vec{0} \text{ car le déplacement se fait sans glissement}$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$, $\vec{v}(O_1) = \dot{x}\, \vec{e}_x$ et $\overrightarrow{O_1 I} = -r_2\, \vec{e}_y$ on obtient

$$\dot{x} = -r_2 \dot{\varphi}$$

22:

$\dfrac{d(Ec + Ep)}{dt} = 0$ puisqu'aucune force non conservative n'est présente

$Ec = m\,\dot{x}^2/2 + I_{Gz}\,\dot{\varphi}^2/2 = m\,\dot{x}^2/2 + I_{Gz}\,\dot{x}^2/2r_2^2$

$Ep = mg\, \Delta h = -mg\, x \sin\alpha$ (Δh est la hauteur parcourue par le tube pour une distance x)

On obtient:

$$Ec+Ep = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I_{Gz}}{r_2^2}\dot{x}^2 - mgx\sin\alpha$$

$$\frac{d(Ec + Ep)}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{I_{Gz}}{r_2^2}\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\alpha}{\mathrm{m} + \mathrm{I_{Gz}}/r_2^2}\text{, avec } \mathrm{I_{Gz}} \quad = \mathrm{m}(\mathrm{r_2^2 + r_1^2}) / 2$$

$$\ddot{x} = \frac{2r_2^2\mathrm{g}\sin\alpha}{3r_2^2 + r_1^2}$$

vu les conditions intiales pour t=0: x=0 et $\dot{x}$=0:

$$\dot{x} = \frac{2r_2^2\mathrm{g}\sin\alpha}{3r_2^2 + r_1^2}t$$

$$x = \frac{r_2^2\mathrm{g}\sin\alpha}{3r_2^2 + r_1^2}t^2$$

A.N. pour t = 10 s: $\ddot{x}$ = 0.099 $\mathrm{ms^{-2}}$; $\dot{x}$ = 0,993 $\mathrm{ms^{-1}}$; x = 4,965 m.

3: Métronome

31: On utilise le théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_\mathrm{A}}{\mathrm{dt}} = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_{ext})$$

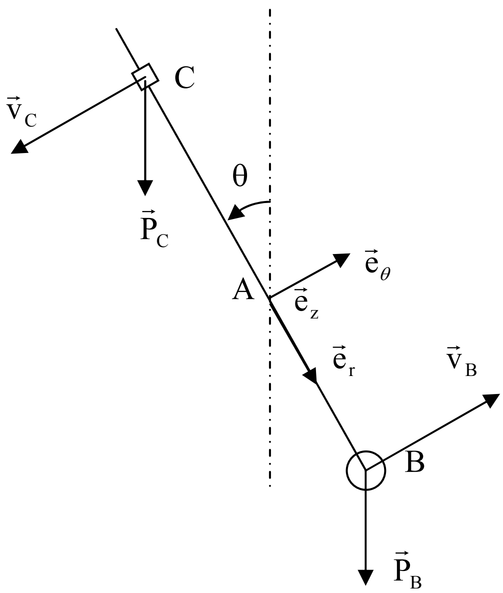
avec

$$\vec{\sigma}_A = \vec{AB} \wedge \mathrm{M}\,\vec{\mathrm{v}}_B + \vec{AC} \wedge \mathrm{m}\,\vec{\mathrm{v}}_C$$
$$= \mathrm{d}\ \vec{e}_r \wedge \mathrm{Md}\ \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta - \mathrm{x}\ \vec{e}_r \wedge \text{-}\mathrm{md}\ \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$
$$= \dot{\theta}(\mathrm{Md^2+mx^2})\ \vec{e}_z$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_\mathrm{A}}{\mathrm{dt}} = \ddot{\theta}\,(\mathrm{Md^2+mx^2})\ \vec{e}_z$$

et

$$\sum \vec{M}_A(\vec{F}_{ext}) = \vec{AB} \wedge \vec{\mathrm{P}}_B + \vec{AC} \wedge \vec{\mathrm{P}}_C$$
$$= \mathrm{d}\ \vec{e}_r \wedge(\mathrm{Mgcos}\theta\ \vec{e}_r - \mathrm{Mgsin}\theta\ \vec{e}_\theta) - \mathrm{x}\ \vec{e}_r \wedge(\mathrm{mgcos}\theta\ \vec{e}_r - \mathrm{mgsin}\theta\ \vec{e}_\theta)$$
$$= (\mathrm{mx - Md})\mathrm{g}\sin\theta\ \vec{e}_z$$



on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{\theta}\,(\mathrm{Md^2+mx^2}) = (\mathrm{mx - Md})\mathrm{g}\sin\theta$$

et pour des petites oscillations autour de la position verticale ($\sin\theta \approx \theta$):

$$\ddot{\theta}\,(\mathrm{Md^2+mx^2}) = (\mathrm{mx - Md})\mathrm{g}\,\theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{(\mathrm{mx - M}d)}{(\mathrm{Md^2 + mx^2})}\mathrm{g}\theta = 0$$

L'oscillateur possède une pulsation propre:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(mx - Md)}{(Md^2 + mx^2)} g}$$, avec $\omega_0 = 2\pi/T_0$ où T_0 est la période propre du mouvement, soit

$$T_0 = 2\pi\left(\frac{Md^2 + mx^2}{mx - Md}\right)^{-1/2}$$

32:

quand x=0, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{Md}}$, la masse m ne sert à rien et la période propre T_0 prend sa valeur minimale.

Pour que $T_0 \to \infty$ il faut $\omega_0 = 0$, soit $x \to \infty$.

Pour ralentir la période il faut par conséquent éloigner le plus possible la masse m de l'axe de rotation. On peut en théorie éliminer toute périodicité si on éloigne la masse m à l'infini, alors que la rapprocher fait tendre cette période vers une valeur minimale non nulle.

33:

Les résultats de TD nous donnent les moments d'inertie d'une sphère de masse M par rapport à un de ses diamètres, $I_{Gzs} = 2MR^2/5$, et d'un cube par rapport à un axe passant par le centre de deux faces opposées, $I_{Gzc} = m(a^2 + a^2)/12 = ma^2/6$.

Dans l'exercice proposé, le cube et la sphère sont déportés par rapport à l'axe de rotation Az, et on doit donc utiliser le théorème de Huygens, soit:

$$I_{Azs} = 2MR^2/5 + Md^2$$
$$I_{Azc} = ma^2/6 + mx^2$$

Le moment d'inertie total I_T du système (sphère + cube) est la somme des moments d'inerties individuels, soit:

$$I_T = 2MR^2/5 + Md^2 + ma^2/6 + mx^2$$

4: Oscillateur amorti