IUT de Caen
Département de Mesures Physiques

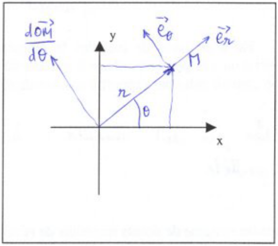
26 Janvier 2002
8h30-11h30

Mécanique

Questions de cours (1h maximum - 6 points)

(Documents et Calculettes non autorisés. Réponses attendues sur la feuille-sujet, seuls les résultats seront donnés. Si une justification est demandée, elle doit être succincte)

1: Comment s'exprime le vecteur position du point M, $\overrightarrow{OM}(r,\theta)$, en coordonnées cartésiennes:



1 pt $\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{array} \right.$

Dessiner le vecteur $d\overrightarrow{OM}/d\theta$ et donner son expression en coordonnées cartésiennes:

1 pt $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \left| \begin{array}{l} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{array} \right.$

Exprimer $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $d\vec{e}_r/d\theta$ puis $d\vec{e}_\theta/d\theta$ en coordonnées cartésiennes. Retrouver alors l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)$ et de l'accélération $\vec{a}(M)$ en coordonnées polaires.

1 pt $\vec{e}_r \left| \begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \end{array} \right.$; $\vec{e}_\theta \left| \begin{array}{l} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right.$; $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \left| \begin{array}{l} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right. = \vec{e}_\theta$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \left| \begin{array}{l} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{array} \right.$

1 pt $\vec{v}(M) \left| \begin{array}{l} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{array} \right.$ $\quad \vec{a}(M) \left| \begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{array} \right.$

1 pt

2: Comment peut-on calculer le vecteur vitesse de rotation d'un solide, $\vec{\Omega}$, connaissant la différence de vitesse entre deux de ses points ?

1 pt $\vec{v}(B) - \vec{v}(A) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

Si $\vec{\Omega} = \omega\, \vec{e}_k$ du repère cylindrique, quelle relation existe-t-il entre les vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ de deux points $A(r_A,\theta_A)$ et $B(r_B,\theta_B)$ du solide ?

2 pt $$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \begin{vmatrix}0\\0\\\omega\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} r_B\cos\theta_B - r_A\cos\theta_A \\ r_B\sin\theta_B - r_A\sin\theta_A \\ 0\end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} r_B\sin\theta_B - r_A\sin\theta_A\\ r_B\cos\theta_B - r_A\cos\theta_A \\ 0\end{vmatrix} = \omega\left(\frac{d\vec{AB}}{d\theta_A} - \frac{d\vec{AB}}{d\theta_B}\right)$$

3: Enoncer les théorèmes permettant de calculer de façon simple le centre de masse de solides homogènes de forme géométrique simple. Peut-on les utiliser dans le cas d'un 3/4 de cerceau filiforme ou 3/4 de disque ? Justifier.

1 pt $S = 2\pi\, L\, x_G(\mathcal{L})$

1 pt $V = 2\pi\, S\, x_G(\mathcal{S})$

1 pt Non, car les forme géométriques cités coupent l'axe vertical.

Est-il possible de calculer le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène par rapport à un axe perpendiculaire à son axe de révolution en utilisant le théorème de Huygens si l'on connaît celui par rapport à son axe de révolution ? Justifier.

1 pt Non on doit connaître le moment d'inertie p/r à 1 axe parallèle.

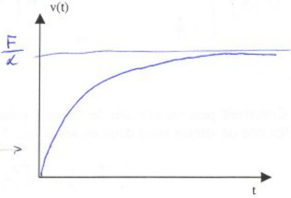
4:

- Dans un système de points matériels de résultante de forces et de résultante de moments tous deux nuls, les forces n'ont aucune action. Vrai ☐ Faux ☒ (1 pt)
- Pour deux solides en contact, le coefficient de frottement statique est toujours supérieur au coefficient de frottement cinétique. Vrai ☒ Faux ☐ (1 pt)
- Je me promène à vitesse constante dans un référentiel Galiléen, G1. Sur ma personne est attaché un référentiel G2. G2 est Galiléen aussi. Vrai ☒ Faux ☐ (1 pt)
- Pour qu'un solide soumis à un système de forces coplanaires soit en équilibre statique, il faut et il suffit que les forces soient concourantes. Vrai ☒ Faux ☐ (1 pt)

5: La trajectoire selon l'axe Ox d'un hors-bord soumis à la force de frottement de l'eau peut s'exprimer par: $x(t) = (m\,F / \alpha^2)\exp(-\alpha\, t / m) + (F/\alpha)\, t + x_0$

F: force développée par le bateau. α: coefficient de frottement. m: masse du bateau.
Exprimer la vitesse v(t) du hors-bord, représentation graphique.

pt $$v(x) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{F}{\alpha}\left(1 - \exp\left(\frac{-\alpha t}{m}\right)\right)$$



Que représente la valeur F/α ?

1 pt $\frac{F}{\alpha}$: vitesse limite

1 pt

Mécanique janvier 2002

1) $\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{dv}{dt} \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{array}\right\}$ $dt = \dfrac{dv}{a} = \dfrac{dx}{v} \Rightarrow \boxed{v\,dv = a\,dx}$

$\int v\,dv = \int a\,dx \rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \rightarrow \left[\dfrac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = \left[\dfrac{k}{x}\right]_{x_0}^{x}$

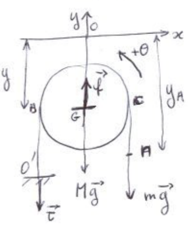
$v_0 = 0$ car solide au repos à $t=0$ $\rightarrow$ $\boxed{v = \left[2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)\right]^{1/2}}$

⚠ : puisque $a(x) = -\dfrac{k}{x^2} = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow k = k(t)$. On ne pouvait donc pas dire $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{x^2} \Rightarrow dv = -\dfrac{k}{x^2}dt \rightarrow v = -\dfrac{k}{x^2}t + cte$ ...

On a alors $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = mk\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) = 5000\,J \Rightarrow \boxed{x_0 = 20\text{ cm}}$

2) 21) a) système : poulie + masse + fil

forces extérieures : poids $M\vec{g}$ et $m\vec{g}$
réaction $\vec{t}(O')$ du bâti
tension $\vec{f}$ du ressort



Pas de forces dissipatives : théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$

$\mathcal{P} = M\vec{g}\cdot\vec{v}_G + m\vec{g}\cdot\vec{v}_A + \vec{f}\cdot\vec{v}_G$

On prend O comme origine du repère : $\mathcal{P} = -Mg\cdot v_G - mg\,v_A + \vec{f}\cdot\vec{v}_G$

$f = k(l - l_0) = -k(y + l_0)$ $\rightarrow$ $\mathcal{P} = -Mg\dfrac{dy}{dt} - mg\dfrac{dy_A}{dt} - k(y+l_0)\dfrac{dy}{dt}$

$\mathcal{P} = -\left(Mg + k(y + l_0)\right)\dfrac{dy}{dt} - mg\dfrac{dy_A}{dt}$

Energie cinétique du système : $E_c = E_{c\,\text{poulie}} + E_{c\,\text{masse } m}$

$E_{c\,\text{poulie}} = E_{c\,\text{rotaθ } \%\, G} + E_{c\,\text{translaθ sur } Oy}$

Soit θ l'angle de rotation de la poulie : $\vec{\Omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{k}$

$\rightarrow E_{c\,\text{rotaθ } \%\, G} = \dfrac{1}{2}I\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$

et $E_{c\,\text{translaθ } Oy} = \dfrac{1}{2}Mv_G^2 = \dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$$E_{c\,\text{masse } m} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dy_A}{dt}\right)^2$$

$$I = I_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$$

On doit lier les trois grandeurs y, y_A et θ :

si A se déplace de dy_A, B et C se déplacent de $dy = \frac{dy_A}{2}$, tout comme G.

Puisque C se déplace de dy, la poulie tourne de $d\theta$ tel que

$$dy = R\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = -\left(Mg + k(y + l_0)\right) \frac{dy}{dt} - 2mg \frac{dy}{dt}$$

$$E_c = \frac{I}{2R^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{M}{2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = 2\left(\frac{I}{2R^2} + \frac{M}{2} + 2m\right) \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{I}{R^2} + M + 4m\right) \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\rightarrow \quad -Mg - k(y + l_0) - 2mg = \left(\frac{I}{R^2} + M + 4m\right) \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{I}{R^2} + M + 4m\right) \frac{d^2y}{dt^2} + ky = -(M + 2m)g - kl_0}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{3}{2}M + 4m\right) \frac{d^2y}{dt^2} + ky = -(M + 2m)g - kl_0}$$

b) $M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{f} + \vec{T} = \vec{0}$ et $m\vec{g} \wedge \vec{AG} + \vec{T} \wedge \vec{O'G} = \vec{0}$

$$M\begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 0 \\ y_e + l_0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -T \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m\begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R \\ -y_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -T \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R \\ -(y_e + O'B) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \quad -k(y_e + l_0) = T + (M + m)g$$

$$\rightarrow \quad -mgR + TR = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{T = mg}$$

$$\boxed{k(y_e + l_0) = -(M + 2m)g}$$

$\rightarrow$ à l'équilibre : avec $u = y - y_e$ $\rightarrow$ $dy = du$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\frac{d^2u}{dt^2} + k\left(u + y_e\right) = (M+2m)g - k\,l_0$$

avec $k(y_e + l_0) = -(M+2m)g$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\frac{d^2u}{dt^2} + k\,u = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2k}{3M+8m}\,u = 0}$$

$$\rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{2k}{3M+8m}} \quad \rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3M+8m}{2k}}}$$

$\omega_0 = 1,55$ rd s^{-1} $\qquad$ $T = 4,05$ s

22) a) On rajoute une force dissipative. Le théorème de l'énergie cinétique devient : $\dfrac{dE}{dt} = \mathcal{P}_{non\ cons}$.

L'équat° du mouvement devient :

$$\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\frac{d^2y}{dt^2} + ky = -(M+2m)g - k\,l_0 - \alpha\,\frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + k\,y = -(M+2m)g - k\,l_0 - R}$$

Soit, à l'équilibre de l'équation du 21b :

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha\,\frac{du}{dt} + k\,u = -R}$$

On retombe sur l'équation différentielle d'1 oscillateur linéaire amortis, soumis à 1 force appliquée constante.

La position d'équilibre de cet oscillateur est décalée par rapport à ye : en effectuant le changement de variables :

$$U = u + \frac{R}{k} \; ; \quad \dot{U} = \dot{u} \; ; \quad \ddot{U} = \ddot{u}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\ddot{U} + \alpha \dot{U} + kU = 0} \qquad (1)$$

avec la nouvelle positiO d'équilibre : $U = 0 \rightarrow u = -\frac{R}{k}$

$$u = y - y_e \rightarrow \boxed{y_c = -\frac{R}{k} + y_e} \qquad \text{avec} \quad y_e = -\frac{(M+2m)g + k l_0}{k}$$

$$= -2{,}56 \text{ m}$$

$R = 3000$ N $\rightarrow$ $\underline{y_c = -5{,}56 \text{ m}}$

$\Rightarrow$ on doit prévoir un battement de 3 m entre le remonte-pentes à vide et le remonte-pentes chargé.

b) Pour identifier le régime auquel on a affaire, il faut mettre l'équation (1) sous la forme :

$$\ddot{U} + \frac{2\alpha}{3M + 8m}\dot{U} + \frac{2k}{3M + 8M} U = 0$$

$$\equiv \ddot{U} + 2\xi\omega_0 \dot{U} + \omega_0^2 U = 0$$

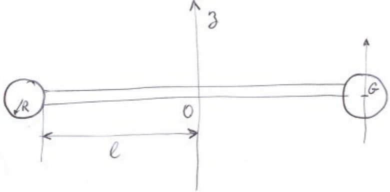
Le type de régime d'oscillations dépend alors de ξ, qu'il nous faut calculer :

$$\xi = \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{2\alpha}{3M + 8m} \qquad \text{avec} \; \Big| \; \omega_0 = 1{,}55 \text{ rd s}^{-1}$$

$$\boxed{\xi = \frac{\alpha}{\omega_0(3M + 8m)}}$$

On veut $\xi > 1$: $\boxed{\alpha > \xi\omega_0(3M + 8m)} = 1286{,}5 \text{ kg rd s}^{-1}$

3)



On cherche I_{Oz}.

sphère : $I_{Oz} = I_{Gz} + m(\ell + R)^2$ (Huygens)

$I_{Gz} = \frac{2}{5} m R^2$ (TD)

$I_{Oz} = \frac{2}{5} m R^2 + m(\ell + R)^2$

2 sphères : $I_{Oz} = \frac{4}{5} m R^2 + 2m(\ell + R)^2$

barre : $I_{Oz} = 4 m' \ell^2 / 12$ (TD)

$= m' \ell^2 / 3$

$\rightarrow$ $I_{total} = I_{barre} + 2 I_{sphère}$

$= \frac{4}{5} m R^2 + 2m(\ell + R)^2 + 4\frac{m' \ell^2}{12}$

$$\boxed{I_{volant_\Delta} = \frac{4}{5} m R^2 + 2m(\ell + R)^2 + \frac{m'}{3} \ell^2} = 27{,}61 \text{ kg m}^2$$

Il vaut mieux augmenter m que m' puisque qu'elle est facteur de ℓ^2 <u>et</u> de R^2.

2 tr/s $\rightarrow$ $\dot\theta = 4\pi$ rd/s $\rightarrow$ $\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \dot\theta^2} = 2178$ J