Avril 2018

1) Courroie d'entraînement

11) : Soient A et B deux points ∈ à un solide indéformable :

$$\vec{v}(A) - \vec{v}(B) = \vec{\Omega} \wedge \vec{BA}$$

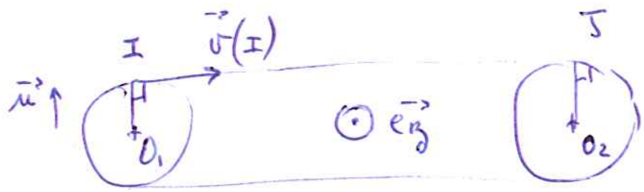
$\vec{\Omega}$: vecteur vitesse de rotation du solide.

12) : Tous les points de la courroie inextensible ont m̂ vitesse : pas de glissement => les pts en périphérie des 2 disques ont également m̂ vitesse que ceux de la courroie :

$$R_1 |\omega_1| = R_2 |\omega_2|$$

Les deux disques tournent dans le m̂ sens : $R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$

ou, en utilisant la relat du champ des vitesses :

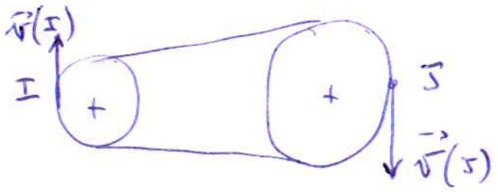


$$\vec{v}(I) = \vec{v}(J)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 \vec{e_z} \wedge R_1 \vec{u} = \omega_2 \vec{e_z} \wedge R_2 \vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$$

ou :



$$\vec{v}(I) = - \vec{v}(J)$$

...

2) Moment d'inertie d'une boule de pétanque

2.1) Soit un axe $\Delta(O, \vec{u})$

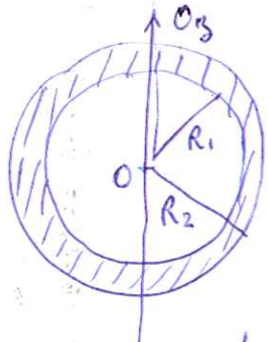
$$I_\Delta = \int_V d^2(M)\, dm$$

$d(M)$: distance du point M à l'axe Δ

dm : élément d'intégration de masse.

V : volume de l'objet.

unité : $kg\, m^{-2}$.

2.2) 

On prend par exemple Oz comme axe, tous les diamètres étant équivalents par symmétrie ;

en coordonnées cylindriques : $d(M, Oz) = r \sin\theta$

$dm = \rho\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$\rightarrow I_{Oz} = \rho \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr\, d\varphi$$

$$= \rho \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} r^4\, dr}_{\frac{R_2^5 - R_1^5}{5}} \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta}_{2/3}$$

$$\rightarrow I_{Oz} = \frac{8}{15}\rho\pi(R_2^5 - R_1^5)$$

avec $m = \frac{4}{3}\pi \left(R_2^3 - R_1^3\right) \rho$

$$\rightarrow \boxed{I_{Oz} = \frac{2}{5} m \left(\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right)}$$

ou bien, par superposition :

$$I_{Oz} = \frac{2}{5} m_2 R_2^2 - \frac{2}{5} m_1 R_1^2$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \rho R_2^5 - \frac{4}{3}\pi \rho R_1^5\right)$$

avec

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

3) Trajectoire

31) Les trajectoire de P_1 et P_2 sont rectiligne et uniformes (v_1 et v_2 sont constants).

32) $\vec{OP_1}(t) = \int \vec{v_1}\,dt = v_1 t\,\vec{e_x} + \vec{OP_1}(0) = v_1 t\,\vec{e_x} + a\,\vec{e_y}$

$\vec{OP_2}(t) = \int \vec{v_2}\,dt = v_2 t\,\vec{e_y} + \vec{OP_2}(0) = v_2 t\,\vec{e_y}$

$\vec{P_1P_2} = \vec{P_1O} + \vec{OP_2} = -v_1 t\,\vec{e_x} + (v_2 t - a)\,\vec{e_y}$

$\Rightarrow \quad P_1P_2 = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{v_1^2 t^2 + (v_2 t - a)^2}$

33) $\vec{v}_{R_1}(P_2) = \dfrac{d}{dt}\vec{P_1P_2}_{R_1} = \begin{vmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_{R_1}(P_2) = \vec{0}$

$\vec{v}_{R_2}(P_1) = \dfrac{d}{dt}\vec{P_2P_1}_{R_2} = -\dfrac{d}{dt}\vec{P_1P_2}_{R_1} = \begin{vmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_{R_2}(P_1) = \vec{0}$

34) $\vec{P_1P_2} = \begin{vmatrix} -v_1 t \\ v_2 t - a \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -v_1 t \\ y(t) = v_2 t - a \end{array} \right\} \Rightarrow t = -\dfrac{x}{v_1}$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{v_2}{v_1}x - a}$$