Méca Avril 2022

1/ 11) Uniformément accéléré : $\vec{a} = \vec{a_0} = \vec{cte}$

rectiligne : $\vec{a_0} \Rightarrow \ddot{x}_0 = a_0$

$\vec{v} \Rightarrow \dot{x} = \int a_0 \, dt = a_0 t + cte$

$t=0 : v = v_0 \Rightarrow \boxed{\dot{x} = a_0 t + v_0}$

$\vec{OM} \Rightarrow x = \int \dot{x} \, dt = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + cte$

$t=0 : x = x_0 \Rightarrow x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$

12)

$x(t) - x_0 = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t = \underline{t\left(a_0 \frac{t}{2} + v_0\right)}$

$\dot{x}^2 = (a_0 t)^2 + v_0^2 + 2 a_0 t v_0$

$\dot{x}^2 - v_0^2 = a_0^2 t^2 + 2 a_0 t v_0 = a_0 t (a_0 t + 2 v_0)$

$= \underline{2 a_0 t \left(\frac{a_0 t}{2} + v_0\right)}$

$= 2 a_0 (x(t) - x_0)$

$$\boxed{\Delta v^2 = 2 a_0 \Delta x}$$

3) Voir TDs

Méca Avril 2022

2)

21) Dans ce problème, S_1 est fixe : $\vec{\Omega}_1 = \vec{0}$

Pour la tige : $\vec{\Omega} = \omega \vec{e_3}$

Pour les engrenages S_2 et S_3 : $\vec{\Omega}_2 = \omega_2 \vec{e_3}$; $\vec{\Omega}_3 = \omega_3 \vec{e_3}$

22) Vitesse de A de la tige : on prend $\vec{u}$ vecteur unitaire sur T

$$\vec{v}(A) - \vec{v}(0) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} = \omega \vec{e_3} \wedge (R_1+R_2)\vec{u} = (R_1+R_2)\omega \vec{v}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(A) = (R_1+R_2)\omega \vec{v}}$$

23) Dans le solide S_2 :

$$\vec{v}(A) - \vec{v}(I_2) = \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{I_2 A}$$

ĉ le solide S_1 est fixe, $\vec{g}(S_2/S_1) = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) = \vec{0}$,

et $\vec{v}(I_1) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(I_2) = \vec{0}}$

$$\Rightarrow (R_1+R_2)\omega \vec{v} = \omega_2 \vec{e_3} \wedge R_2 \vec{u} = \omega_2 R_2 \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{R_1+R_2}{R_2}\omega}$$

24)

$$\vec{v}(B) - \vec{v}(0) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OB} = \omega \vec{e_3} \wedge (R_1+2R_2+R_3)\vec{u}$$

$\vec{v}(0) = \vec{0}$: $\boxed{\vec{v}(B) = (R_1+2R_2+R_3)\omega \vec{v}}$

$$\vec{g}(S_3/S_1) = \vec{v}(J_3) - \vec{v}(J_2) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(J_3) = \vec{v}(J_2)}$$

$$\vec{v}(B) - \vec{v}(J_3) = \vec{\Omega}_3 \wedge \vec{J_3 B} = \omega_3 \vec{e_3} \wedge R_3 \vec{u} = \omega_3 R_3 \vec{v}$$

$$\vec{v}(J_2) = \vec{v}(J_3) = \vec{v}(I_2) + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{I_2 J_2} = \vec{0} + \omega_2 \vec{e_3} \wedge 2R_2 \vec{u} = +2\omega_2 R_2 \vec{v}$$

$$= +2\,\frac{R_1+R_2}{R_2}\,\omega R_2 \vec{v} = +2(R_1+R_2)\omega \vec{v}$$

$$\vec{v}(B) = +2\,\frac{R_1+R_2}{R_2}\,\omega R_2 \vec{v} + \omega_3 R_3 \vec{v} = (R_1+2R_2+R_3)\omega \vec{v}$$

Pointe traceuse

Cinématique du point

1/

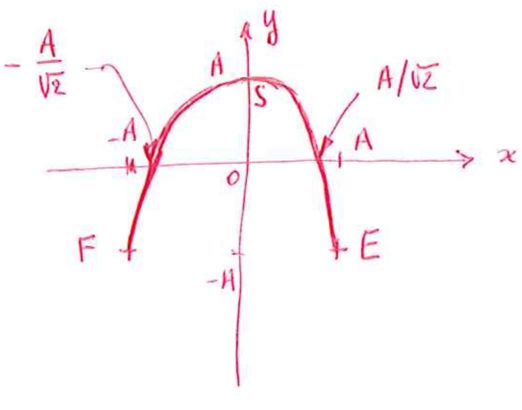
$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t) \\ y(t) = A \cos(2\omega t) \end{cases}$$

$[\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ avec $a = b = \omega t]$

$$y(t) = A\left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right)$$
$$= A\left(1 - \sin^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right)$$
$$= A\left(1 - 2\sin^2(\omega t)\right)$$
$$= A\left(1 - 2\frac{x^2(t)}{A^2}\right)$$ équation d'1 parabole.

mais $\sin(\omega t)$ limité entre -1 et 1 $\rightarrow$ $x(t) \in [-A; A]$

avec $x = \pm A$: $y = -A$; $x = 0$: $y = A$ } arc de parabole



$y = 0$: $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

2)

$$\vec{OM} = \begin{vmatrix} A\sin(\omega t) \\ A\cos(2\omega t) \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{vmatrix} A\omega\cos(\omega t) \\ -2A\omega\sin(2\omega t) \end{vmatrix}$$

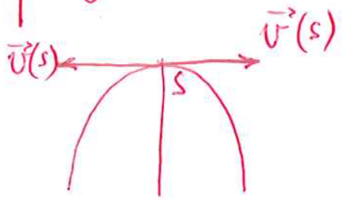
$$\rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{vmatrix} -A\omega^2\sin(\omega t) \\ -4A\omega^2\cos(2\omega t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega^2 x(t) \\ -4\omega^2 y(t) \end{vmatrix}$$

en S : $y = A$; $x = 0$: $A\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega t = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ ← condition + restrictive (a)

$A\cos(2\omega t) = A \Rightarrow \cancel{2}\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

pour $\omega t = k\pi$: $\vec{v}(S) = \begin{vmatrix} \pm A\omega \\ 0 \end{vmatrix} = \pm A\omega\,\vec{e_x}$

$\rightarrow \|\vec{v}(S)\| = A\omega$



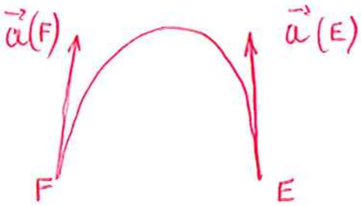
3) $\vec{v}(P) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\omega t) = 0 \\ \sin(2\omega t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{N} \\ 2\omega t = k\pi \end{cases}$

V_x et V_y doivent s'annuler en même temps : $\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ + restrictive

Quand $\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\left.\begin{array}{l} x(t) = \pm A \\ y(t) = -A \end{array}\right\}$ points $E(A;-A)$ et $F(-A;-A)$

Au point E, $\vec{a}(E) = \begin{vmatrix} -\omega^2 A \\ +4\omega^2 A \end{vmatrix}$

F, $\vec{a}(F) = \begin{vmatrix} \omega^2 A \\ +4\omega^2 A \end{vmatrix}$



pente de $\vec{a}(E) = -4$
$\vec{a}(F) = 4$

tangente de la trajectoire en E : $\tan = \frac{y(t)}{x(t)}$
$=$

4) Au sommet de $\mathcal{E}$, conditions (a) :

$$\vec{a}(S) = \begin{vmatrix} 0 \\ +4A\omega^2 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{e_t} + \frac{v^2}{r}\vec{e_n}$ $\qquad \vec{e_t} = \vec{e_x}$; $\vec{e_n} = -\vec{e_y}$ en S

$= \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{e_x} - \frac{v^2}{r}\vec{e_y}$

c $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{v^2}{r} = \frac{(\cancel{A\omega})^2}{r} = \frac{(A\omega)^2}{r} = +4A\omega^2$

$\rightarrow \boxed{r = \frac{A}{4}}$