

**Mécanique**  
**1,5 heures**

---

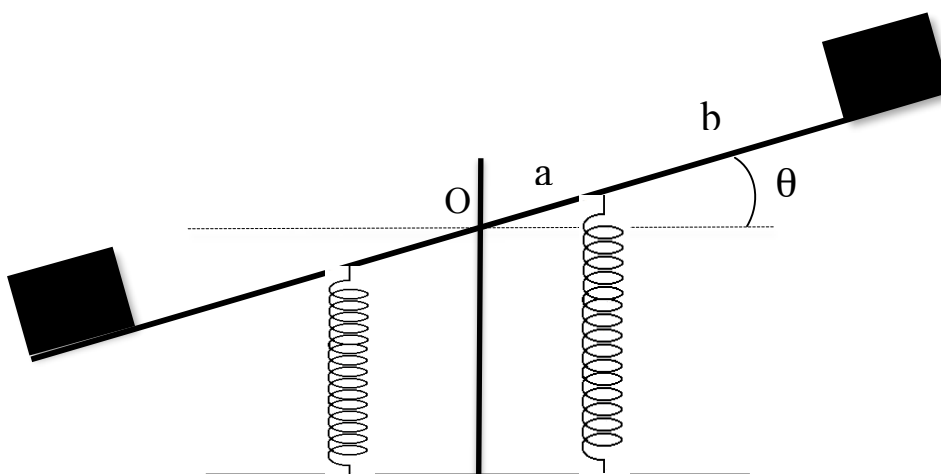
Aucun document autorisé. La calculatrice pourra être utilisée pendant les 5 dernières minutes de l'épreuve. Toutes les réponses doivent être justifiées.

**Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants**

**1: Equilibre statique d'une balançoire**

Une balançoire est constituée d'une tige de longueur  $L = 2(a+b)$ , de masse négligeable. La rotation dans le plan de la figure est parfaite en son point milieu  $O$ . Deux ressorts de constantes de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , de masse négligeable, sont montés à la distance  $a$  de  $O$ . Aux deux extrémités de la balançoire sont installées deux personnes de masse  $m_1$  et  $m_2$ . On suppose pour fixer le sens du mouvement que  $m_1 > m_2$ .

Trouver la relation entre  $\theta_s$  (angle entre la balançoire et l'horizontale à l'équilibre) et  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $b$  et  $k$ .



## 2: Moments d'inertie

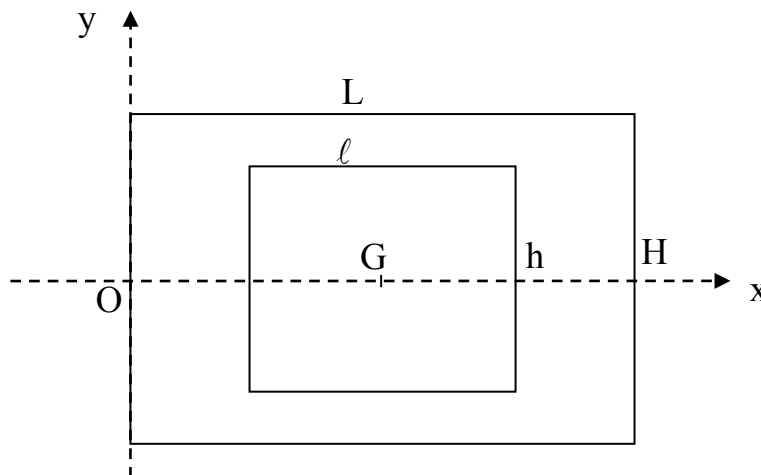
Une plaque mince homogène de masse  $m$ , de largeur  $L$  et de hauteur  $H$  est évidée en son centre d'un rectangle de largeur  $\ell$  et de hauteur  $h$ . On veut calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe  $Oy$ . On suggère les étapes suivantes:

**21:** Calculer le moment d'inertie  $I_{Gy}$  de la plaque pleine de côtés  $L$  et  $H$ . Le résultat sera exprimé en fonction de la masse surfacique  $\sigma$

**22:** Calculer le moment d'inertie  $I_{Gy}$  de la plaque évidée. Le résultat sera exprimé en fonction de la masse  $m$  de la plaque.

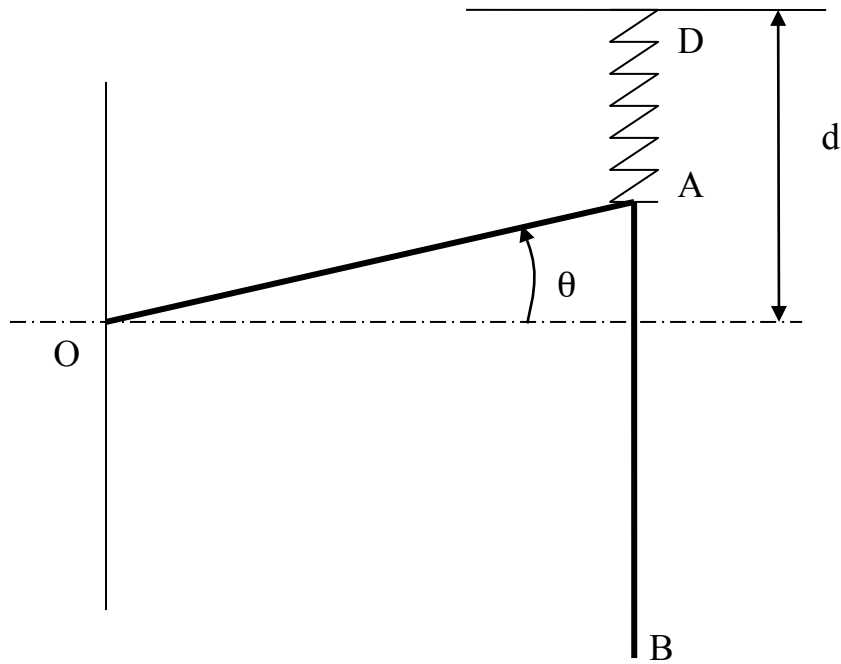
**23:** Calculer le moment d'inertie  $I_{Oy}$  de la plaque évidée.

**24:** Application numérique:  $L = 1\text{m}$ ;  $H = 0,5\text{m}$ ;  $\ell = 0,5\text{m}$ ;  $h = 0,4\text{m}$ ;  $m = 20\text{kg}$ .



## 3: Oscillations 1D

Un système est constitué d'une barre  $OA$ , de masse  $m$ , de longueur  $L$ , repérée par rapport à l'horizontale par un angle  $\theta$ , et d'une barre  $AB$  identique, verticale. Les deux barres sont parfaitement articulées en  $A$ , et la barre  $AB$  est contrainte de se déplacer en restant verticale, sans frottement. L'articulation  $O$  est constituée d'un ressort spiral de constante de torsion  $c$ , de torsion nulle quand  $\theta = 0$ , et opérant un amortissement visqueux (fluide) de constante  $\chi$ . Un ressort linéaire de masse négligeable et de constante de raideur  $k$  permet la suspension du système en  $D$ . La longueur au repos du ressort linéaire est  $\ell_0$ . L'angle  $\theta$  est suffisamment petit pour pouvoir considérer que le ressort reste vertical.



Rappels pour le ressort spiral:

- L'énergie potentielle du couple de rappel est  $E_p(R_{\text{spiral}}) = c\theta^2/2$
- La puissance développée par le couple d'amortissement est  $P(R_{\text{spiral}}) = -\chi\dot{\theta}^2$

**31:** Etablir l'équation du mouvement du système.

Réduire l'équation différentielle précédente pour de faibles amplitudes de mouvement.

**32:** Calculer  $d$  pour obtenir  $\theta = 0$  à l'équilibre. Réécrire l'équation différentielle en conséquence.

**33:** Calculer la pulsation propre du mouvement, et le coefficient d'amortissement. Le mouvement est-il pseudo-périodique (justifier)?

A.N.: On donne:  $k = 1000 \text{ N/m}$ ;  $c = 2 \text{ N.m.rd}^{-1}$ ;  $\chi = 2 \text{ N.m.s. rd}^{-1}$ ;  $L = 1 \text{ m}$ ;  $m = 10 \text{ kg}$ .