Juin 2015

1) 11) En équilibre statique le torseur statique doit être nul :

$$\{T\} = \left\{ \vec{R}(\vec{F}_{ext}) \,\middle|\, \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) \right\} = \{\vec{0}, \vec{0}\}$$

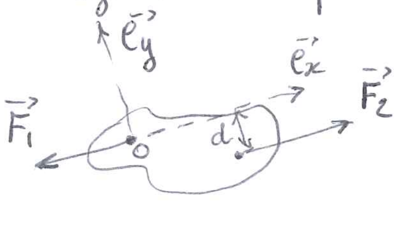
Il résulte deux équations :

(1) $\vec{R}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ Résultante des forces extérieures appliquées au système

(2) $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \quad \forall O$

Résultante des moments dûs au forces extérieure appliquées au système.

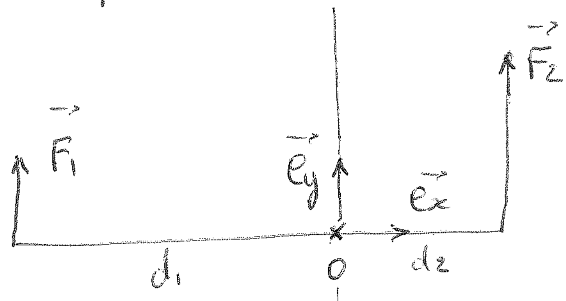
12) système respectant (1) mais pas (2) :



$\|\vec{F_1}\| = \|\vec{F_2}\|$: $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_2}) = \vec{0} + d\, F_2 \vec{e_z} \neq \vec{0}$$

système respectant 2 mais pas 1 :



le système est libre de se déplacer selon $\vec{e_y}$, sans frottement.

$$\|\vec{F_1}\| = \frac{1}{2}\|\vec{F_2}\| \quad ; \quad d_1 = 2d_2$$

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_2}) = -d_1 F_1 \vec{e_z} + d_2 F_2 \vec{e_z}$$

$$= \left(-2d_2 \cdot \frac{1}{2} F_2 + d_2 F_2\right)\vec{e_z}$$

$$= \vec{0}$$

2) 21) $\vec{T} = k\,\vec{\Delta L} = k(l - l_0)\,\vec{u}$; $\vec{u} = -\cos\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$l^2 = OA^2 + OH^2 = 2L^2 \rightarrow l = \sqrt{2}\,L$

$$\rightarrow \boxed{\vec{T} = \frac{k\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}L - l_0\right)\left(\vec{e_y} - \vec{e_x}\right)}$$

22) $\sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$$

$$\vec{0} + \begin{vmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{k}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}L - l_0) \\ \frac{k}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}L - l_0) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$-\frac{PL}{2} + \frac{kL}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}L - l_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{P}{2L - \sqrt{2}\,l_0}}$$

avec ce k : $\boxed{\vec{T} = \frac{P}{2}\left(\vec{e_y} - \vec{e_x}\right)}$

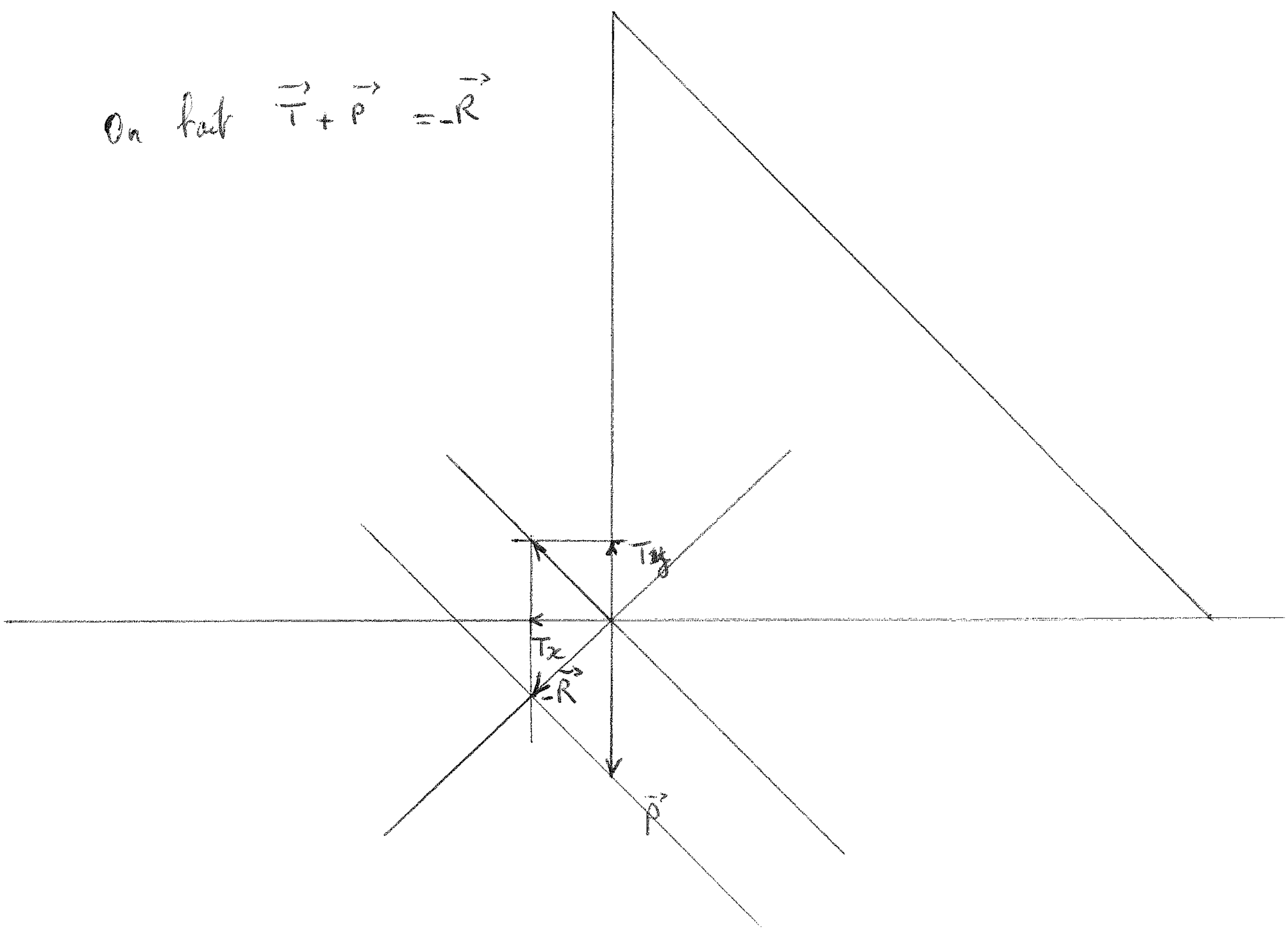
23) $\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} R_x \\ R_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{P}{2} \\ \frac{P}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{R} = \begin{vmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{P}{2} \end{vmatrix}} \Rightarrow \boxed{\|\vec{R}\| = \frac{P}{\sqrt{2}}}$$

24)

On fait $\vec{T} + \vec{P} = -\vec{R}$



$P \equiv 2\,cm \Rightarrow R \equiv 1{,}45\,cm \rightarrow R = \frac{1{,}45}{2} \cdot 100$

$= 72\ N$

$1{,}45 \approx \sqrt{2} \Rightarrow$ cohérent avec le résultat du 23)

3) Pour une sphère creuse :

$$I_{Oz} = \int d^2 \, dm \qquad d = r \sin\theta$$
$$dm = \rho \, dv = \rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\varphi$$

$$= \rho \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} r^4 dr}_{\frac{R_2^5}{5} - \frac{R_1^5}{5}} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta (1 - \cos^2\theta) \, d\theta$$
$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{2} - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}_{2/3}$$

$$\rightarrow \quad I_{Oz} = \frac{8}{15} \rho \pi \left(R_2^5 - R_1^5\right)$$

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho \left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{I_{Oz} = \frac{2}{5} M \left(\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right)}$$

4) 41) On utilise $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{\mathcal{F}}_{ext})$ ou $\dfrac{dE}{dt} = \mathcal{P}(\vec{\mathcal{F}}_{ext\ non-conserv.})$

Forces : | $\vec{P}$ en G ; Réac° $\vec{R}$ en O
| Rappel du ressort $\vec{T}$ en A
| Amortissement $\vec{F}$ en $\vec{B}$

il faut E_p et E_c

$$E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 \qquad \text{Rotat° / axe fixe}$$

$$I_\Delta = \frac{7}{3} M L^2$$

$E_p(\text{ressort}) = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$; $l = l_e + L\sin\theta$

Si on prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur quand $\theta = 0$:

$$E_p(AB) = E_p(AO) + E_p(OB)$$

$$= -\frac{M}{4}g\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{3M}{4}g\frac{3L}{2}\sin\theta = MgL\sin\theta$$

$\Rightarrow$ energie mécanique totale $E = E_c + E_p$

$$\boxed{E = \frac{7}{6}ML^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}k(l_e + L\sin\theta - l_0)^2 + MgL\sin\theta}$$

42) Non ! amortissement $\equiv$ frottement de puissance dissipée

$$\mathcal{P} = \vec{F}_B \cdot \vec{v}(B) = -\alpha\vec{v}(B) \cdot \vec{v}(B) = -\alpha v^2(B)$$

$$v^2(B) = (3L\dot\theta)^2$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = -9\alpha L^2\dot\theta^2$$

43) $\frac{dE_c}{dt} = \frac{7}{3}ML^2\dot\theta\ddot\theta$

$$\frac{dE_p}{dt} = MgL\dot\theta\cos\theta + Lk\dot\theta(l_e + L\sin\theta - l_0)\cos\theta$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{7}{3}ML^2\cancel{\dot\theta}\ddot\theta + MgL\cancel{\dot\theta}\cos\theta + Lk\cancel{\dot\theta}(l_e + L\sin\theta - l_0)\cos$$

$$= -9\alpha L^2\dot\theta^{\cancel{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{7}{3} M L \ddot{\theta} + \left(Mg \cos\theta + k\,(l_e - l_0 + L \sin\theta) \cos\theta \right) + 9\alpha L \dot{\theta} = 0}$$

44) équilibre ($\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$) pour $\theta = 0$:

$$\rightarrow \quad Mg + k\,(l_e - l_0) = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{k = -\frac{Mg}{l_e - l_0}}$$

45) Avec cette condiθ, et pour de petites oscillaθs :

$$\frac{7}{3} M \ddot{\theta} + 9\alpha \dot{\theta} + k \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\sin\theta \simeq \theta \qquad \cos\theta \simeq 1$$

$$\frac{7}{3} M \ddot{\theta} + 9\alpha \dot{\theta} + k\theta = 0$$

C'est un m^vt amorti, avec une décroissante exponentielle.

Le coefficient d'amortissement ξ vaut : $\xi = \frac{9\alpha}{7M} \cdot \frac{3}{2\omega_0}$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{7M}}$ pulsaθ propre.