juin 2016

1) Cours

11) $\vec{OG} = \frac{1}{m}\int \vec{OM}\, dm$ et $\vec{OC} = \frac{1}{V}\int \vec{OM}\, dV$

12) $\vec{OG} = \int \vec{OM}\, dm \,/ \int dm = \int \vec{OM}\, \rho dV \,/ \int \rho dV = \dfrac{\rho \int \vec{OM}\, dV}{\rho \int dV}$

$= \vec{OC}$

13) Théorème fondamental de la dynamique : $\vec{R}(\vec{F}_{ext}) = m\, \vec{a}(G)$

" du moment cinétique : $\dfrac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{ext})$ O fixe

" de l'énergie cinétique : $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext})$

" de l'énergie mécanique : ou $\dfrac{dE}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext\ non\ conservative})$

2 Statique

force :
- poids $\vec{P}$ de OA. $\vec{P} = -Mg\,\vec{e_y}$
- poids $\vec{F}$ de la masse m. $\vec{F} = -mg\,\vec{e_y}$
- Tension $\vec{T}$ dans le fil : $\|\vec{T}\| = \|\vec{F}\| = mg$
- Réaction $\vec{R}$ en O.

(a) $\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$

(b) $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T}) = \vec{0}$

$\vec{0} + \vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} \frac{L}{2}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\sin\alpha \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -Mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{vmatrix} \wedge - \begin{vmatrix} T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) \\ T\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$-Mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\alpha - T\cancel{L}\cos\alpha\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)}_{\cos(\alpha+\beta)} + T\cancel{L}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)}_{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha = 0$$

$$T = \frac{Mg\cos\alpha}{2\left[\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\right]} = \frac{Mg\cos\alpha}{2\cos\beta}$$

$$\boxed{T = \frac{Mg\cos\alpha}{2\cos\beta}}$$

l'équation (a) nous donne alors :

$$\begin{vmatrix} R_x \\ R_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -Mg \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} T\sin(\alpha+\beta) \\ T\cos(\alpha+\beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} R_x = \dfrac{Mg\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\beta} \\ R_y = Mg + \dfrac{Mg\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\beta} \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

3 Voir TD.

4 Voir TD