PLANS FACTORIELS A DEUX NIVEAUX (PLANS 2^k)

Définition d'un plan factoriel Chaque facteur contrôlé X_i peut prendre, dans son domaine de variation, l_i valeurs distinctes ou niveaux. Le plan comporte toutes les expériences qu'il est possible de réaliser en donnant à chaque facteur toutes les valeurs qu'il peut prendre. Si k est le nombre des facteurs le nombre des expériences est égal à $l_1 \times l_2 \times \dots \times l_k$

On dit qu'il s'agit d'un plan factoriel $l_1 \times l_2 \times \dots l_k$

Définition d'un plan factoriel à deux niveaux

1) $l_i = 2$

2) les deux niveaux que peut prendre chaque facteur sont pris aux limites de son intervalle de variation :

$X_i = \pm 1$ (variable réduite centrée)

Un facteur contrôlé discontinu peut également prendre deux valeurs (par ex catalyseur A, catalyseur B) On affecte arbitrairement le niveau +1 à l'un, le niveau -1 à l'autre.

Si k est le nombre des facteurs ce plan comporte 2^k expériences effectuées à la limite du domaine expérimental, plus exactement aux sommets d'un carré ($k=2$) d'un cube ($k=3$) ou d'un hypercube ($k>3$).

Ces plans factoriels 2^k présentent un certain nombre d'avantages que se préciserons ultérieurement mais que nous indiquons dès maintenant.

- Ils permettent de déterminer les influences relatives des divers facteurs sur la réponse ainsi que leurs interactions mutuelles et

d'orienter une recherche ultérieure.

- Si l'étude doit être poursuivie après la réalisation d'un plan factoriel, on peut le reprendre dans un plan plus complet conduisant à la détermination de la surface de réponse. Les expériences faites ne sont pas "perdues" (processus séquentiel).
- Inversement on peut au début d'une étude les scinder en plans factoriels fractionnaires que l'on développera à mesure des besoins.
- Les calculs nécessaires relèvent des mathématiques élémentaires.

Matrice d'expérience et résultats d'un plan 2^k

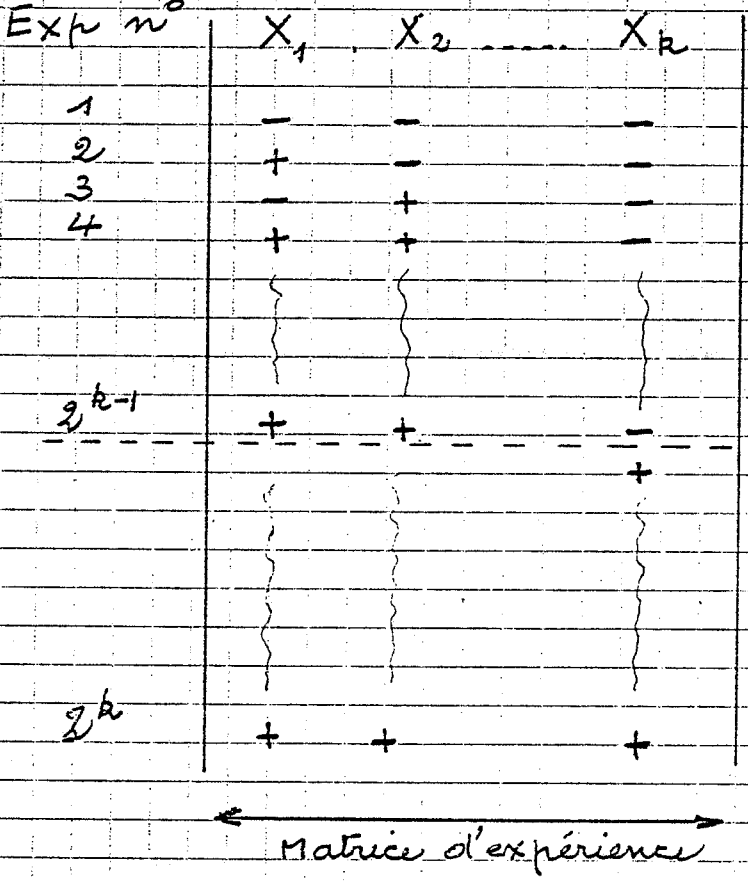
k facteurs $X_1, X_2 \dots X_k$ pouvant prendre les valeurs +1 et −1, 2^k expériences. La matrice d'expérience comporte 2^k lignes et k colonnes. Une manière classique de l'écrire est la suivante :

1ère colonne : facteur X_1 1 (2^0) signe − suivi de 1 signe +
2ème " " X_2 2 (2^1) signes − suivis de 2 signes +
3ème " " X_3 4 (2^2) " " 4 "
etc ----
$k^{ème}$ " " X_k 2^{k-1} " " 2^{k-1} "

On vérifie facilement que les 2^k expériences sont différentes. On peut noter sur chaque ligne le résultat y obtenu. L'ensemble résume la réalisation du plan factoriel.

Lorqu'on utilise ce procédé pour écrire la matrice d'expérience, on dit qu'elles sont classées dans l'ordre standard de YATES, du nom de l'auteur qui l'a introduit. Il est bien entendu

qu'il n'est pas obligatoire de les effectuer dans cet ordre, Il est au contraire recommandé de les effectuer au hasard, par exemple par tirage au sort surtout lorsqu'on doit répliquer le plan c'est à dire refaire plusieurs fois la même experience pour obtenir une valeur moyenne de la réponse.



Un plan 2^k apporte ainsi 2^k informations sur la réponse étudiée. Comment les exploiter ?

Calcul de la valeur moyenne et des effets

Les 2^k valeurs y_i sont utilisées pour calculer la valeur moyenne de la réponse et effectuer $2^k - 1$ comparaisons entre les résultats obtenus. Ces comparaisons sont introduites en statistique et nous ne les justifierons pas à priori. Indiquons simplement que dans le cas d'un plan 2^k ce seront des expressions du type

$$I = \sum y_i / 2^k$$ = val moy de la réponse -> 2^{k-1} comparaison

$$\beta_w = \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} a_{wi}\, y_i \qquad \text{avec } a_{wi} = \pm 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{2^k} a_{wi} = 0$$

Les valeur β_w ainsi calculées sont des effets qui s'introduisent simplement en considerant l'équation dont il sont solut :

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{\substack{h,i,j=1 \\ h \neq i \neq j}}^{k} \beta_{hij} X_h X_i X_j \qquad h < i < j$$

$$+ \cdots\cdots \beta_{12\ldots k} X_1 X_2 \cdots X_k$$ développement de la formule du binôme.

On vérifie facilement que le second membre comporte 2^k termes $\beta_0, \beta_{ij} \cdots, \beta_{12\ldots k}$ (par exemple à l'aide de la formule du binôme). On écrit cette relation pour chacune des expériences effectuées.

On obtient ainsi un système de 2^k équations linéaires à 2^k inconnues dont les coefficients valent ± 1 selon le signe de X_i ou des produits $X_i X_j$, $X_h X_i X_j$ etc.... (Remarquer qu'il n'y a pas d'élément carré (X_i^2). Ce système se résoudra facilement à l'aide d'une matrice $(2^k \times 2^k)$ appelée matrice des effets. Comment est elle constituée ?

Première colonne : elle correspond au signe de β_0 : 2^k signes +

Colonnes 2 à k+1 : elles correspondent aux signes de β_i, soit X_i on retrouve la matrice d'expérience.

Colonnes suivantes : elles se déduisent de la matrice d'expérience (colonnes 2 à k+1) en appliquant ligne par ligne la règle des signes aux produits 2 par 2, 3 par 3 etc... jusqu'à faire le produit des k colonnes. On indique en haut de chaque colonne l'effet β auquel elle correspond (On utilise souvent aussi la notation $X_i X_j \cdots$ ou simplement $ij \cdots$. La colonne correspondant à β_0 est notée I. Nous donnons ci dessous à titre d'exemple la matrice des effets d'un plan 2^3 et d'un plan 2^4

Comparaison sur la 1ère colonne : $(-y_1 + y_2 - y_3 \dots + y_{2^k}) / 2^k$

$= \dfrac{(y_2 + y_4 + \dots + y_{2^k}) - (y_1 + y_3 + \dots y_{2^{k-1}})}{2^k}$

= effet moyen de la 2ème variable X_1

id pour les X_i

β_0	β_1	β_2	β_3	β_{12}	β_{13}	β_{23}	β_{123}
I	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
+	−	−	−	+	+	+	−
+	+	−	−	−	−	+	+
+	−	+	−	−	+	−	+
+	+	+	−	+	−	−	−
+	−	−	+	+	−	−	+
+	+	−	+	−	+	−	−
+	−	+	+	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+	+
	Matrice d'expérience						

règles des signes

→ 1 val moyenne + k comp.

→ reste $2^k - k - 1$ comp.

Matrice des effets d'un plan 2^3 (expériences classées dans l'ordre standard)

matrice du modèle (des effets) : E

I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+
+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
+	−	+	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	−	+	−
+	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+	+	+
+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−
+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+
+	−	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−	+	+	−	+
+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	−	−
+	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+	−
+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+
+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
+	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−	−
+	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+
+	+	−	+	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−
+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	Matrice d'expérience														

Matrice des effets d'un plan 2^4 (expériences classées dans l'ordre standard)

interact d'ordre 1 : β_{ij}

matrice d'Hadamard

$$\boxed{E \cdot \beta = Y} \quad \text{ou} \quad \boxed{\beta = E^{-1} Y}$$

et $E'E = 2^k I_{2^k}$

$E' = 2^k I_{2^k} E^{-1}$

Calcul des effets

Il se déduit de l'équation matricielle $y = E\beta \Rightarrow E^{-1}y = \beta$

E est la matrice des effets, E^{-1} son inverse, y le vecteur colonne des 2^k résultats expérimentaux y_i, β le vecteur colonne des 2^k inconnues β. La résolution numérique est en fait très simple On montre facilement que la matrice des effets E est une matrice d'Hadamard : $E'.E = 2^k I_{2^k}$ d'où $E^{-1} = \frac{1}{2^k} E'$

L'inverse de la matrice E est sa transposée multipliée par $\frac{1}{2^k}$

D'où la règle pratique permettant de calculer un effet quelconque β.

$\beta_{k,i\ldots}$	
+	y_1
+	y_2
−	y_3
etc	etc
≀	≀

Matrice E

$$\beta_{k,i\ldots} = \frac{1}{2^k}(+y_1 + y_2 - y_3 \text{ etc}\ldots)$$

Pour calculer $\beta_{k,i\ldots}$ on prend les signes de la colonne correspondante dans la matrice des effets, on les affecte, ligne par ligne aux résultats expérimentaux y puis on divise la somme algébrique obtenue par 2^k.

Remarques 1. Chaque colonne comportant autant de signes + que de signes − (sauf la première) les effets sont des comparaisons (au sens de la p. 17)

2. La matrice E possède des propriétés importantes que nous nous bornerons à signaler. Les réponses y_i étant des variables aléatoires indépendantes de variance σ^2, les valeurs β calculées sont des variables aléatoires indépendantes de variance $\frac{\sigma^2}{2^k}$. (voir la matrice P_4 des plan de pesées, p. 7)

3. Les valeurs numériques des effets étant calculées l'équation écrite p. 17 - et qui a d'ailleurs servi à les calculer - peut apparaître comme une relation entre Y et les divers facteurs X_i. Il est important de noter qu'elle n'est vérifiée que pour les 2^k points où les expériences ont été effectuées

Interprétation des coefficients β.

- β_0 (1ère colonne de la matrice E) D'après la règle de calcul $\beta_0 = \frac{\sum y_i}{2^k}$ c'est la réponse moyenne pour les 2^k mesures effectuées

- β_i (colonnes 1 à k+1 _ matrice d'expérience) cet effet est obtenu en comptant positivement les 2^{k-1} réponses pour lesquelles le facteur X_i est au niveau +1, négativement les 2^{k-1} réponses pour lesquelles X_i est au niveau -1, puis en divisant par 2^k Il correspond à la variation moyenne de réponse lorsque X_i passe du niveau -1 au niveau +1 C'est l'effet moyen du facteur X_i

- Les autres effets β_{ij} etc ... faisant intervenir au moins deux facteurs sont des interactions : β_{ij} est une interaction d'ordre 1, β_{kij} d'ordre 2 etc ... Nous les examinerons à l'occasion des exemples qui vont suivre.

Exemples de plans factoriels.

1. Plan 2^2 On veut étudier l'influence de la température T et de la pression P sur le rendement d'une réaction → 4 exp.

a/ Domaine expérimental et niveau des variables réduites centrées

T	100°C	200°C
P	5 bar	10 bar
Niveau	−	+

(variables réduites centrées)

b/ Matrice des effets

I	T	P	TP	Rdt %
+	−	−	+	54
+	+	−	−	66
+	−	+	−	58
+	+	+	+	71

↑ donnée expérience

c Calcul de la moyenne et des effets

β_0 = valeur moyenne = $\frac{54+66+58+71}{4} = 62,25$

β_T = effet moyen de la température = $\frac{-54+66-58+71}{4} = 6,25$

β_P = effet moyen de la pression = $\frac{-54-66+58+71}{4} = 2,25$

β_{TP} = interaction TP d'ordre 1 = $\frac{54-66-58+71}{4} = 0,25$

Commentaire Il n'y a pas interaction entre le facteur T et le facteur P puisque $\beta_{TP} = 0,25$. L'effet moyen de la température et celui de la pression sont positifs. On a probablement intérêt à augmenter la température et la pression. On aurait pu le voir, puisque le meilleur rendt est obtenu pour + + +

2. Autre exemple de plan 2^3 (un facteur discontinu)

On veut étudier l'influence de la concentration d'un poison sur l'activité de deux catalyseurs A et B dans une réaction.

a) C = Catalyseur A B

P = Concentration du poison 10^{-4} 10^{-3}

Niveau − +

b) Matrice des effets

I	C	P	CP	Rdt %
+	−	−	+	65
+	+	−	−	80
+	−	+	−	60
+	+	+	+	50

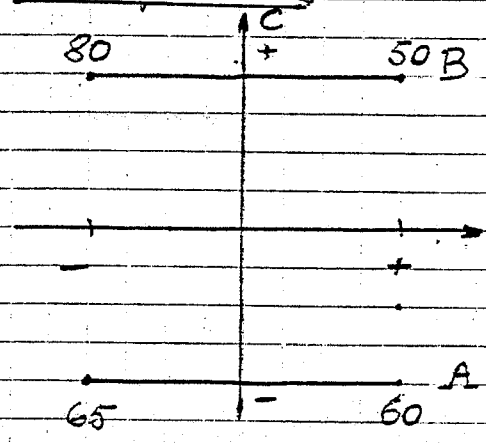
c) β_0 = valeur moyenne = 63,8

β_c = effet moyen du catalyseur = 1,3

β_p = effet moyen du poison = − 8,8

β_{cp} = interaction du 1er ordre poison.catalyseur = − 6,3

Commentaire l'effet moyen du catalyseur est positif et faible, l'effet moyen du poison est négatif mais comme il y a une forte interaction catalyseur-poison on ne peut pas les commenter séparément. Il faut examiner l'influence simultanée des deux facteurs



Le domaine expérimental se réduit à deux segments de droite.

S'il est possible de diminuer la concentration du poison, utiliser le catalyseur B, sinon employer A

Si on peut avoir p faible (10^{-4}) il vaut mieux B, sinon il vaut mieux A

Les exemples suivants sont extraits de l'ouvrage de BOX, HUNTER et HUNTER, STATISTICS FOR EXPERIMENTERS J. WILEY (1978) dont la lecture est vivement conseillée.

3. Plan factoriel 2^3 Ce plan a été effectivement réalisé, à de légères modifications près, pour optimiser le rendement d'une réaction en fonction de trois facteurs : température (T) concentration d'un réactif (C) nature d'un catalyseur (K)

a/ matrice d'expérience et domaine expérimental

	T	C	K
1	−	−	−
2	+	−	−
3	−	+	−
4	+	+	−
5	−	−	+
6	+	−	+
7	−	+	+
8	+	+	+

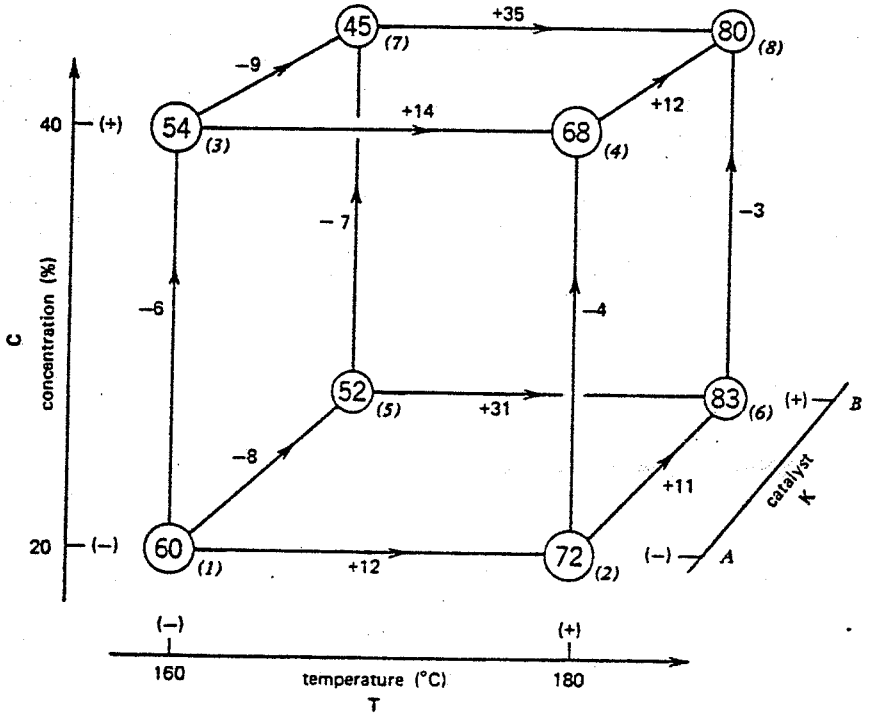
temperature (°C)		*concentration (%)*		*catalyst*	
−	+	−	+	−	+
160	180	20	40	*A*	*B*

b/ matrice des effets et résultats expérimentaux

I	T	C	K	TC	TK	CK	TCK	Rdt
+	−	−	−	+	+	+	−	60
+	+	−	−	−	−	+	+	72
+	−	+	−	−	+	−	+	54
+	+	+	−	+	−	−	−	68
+	−	−	+	+	−	−	+	52
+	+	−	+	−	+	−	−	83
+	−	+	+	−	−	+	−	45
+	+	+	+	+	+	+	+	80

← Mat. exp. →

c/ Représentation des résultats dans l'espace TCK



d/ calcul de la valeur moyenne et des effets

valeur moyenne	$\beta_0 = 64,25$	Interact. ordre 1 TC	$\beta_{TC} = 0,75$
Effets moyens T	$\beta_T = 11,5$	TK	$\beta_{TK} = 5,0$
C	$\beta_C = -2,50$	CK	$\beta_{CK} = 0,0$
K	$\beta_K = 0,75$	Interact ordre 2 TCK	$\beta_{TCK} = 0,5$

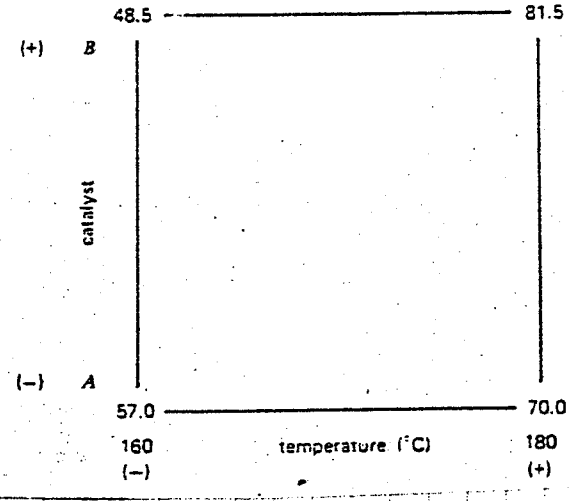
Commentaires : trois effets sont importants T, C, TK

Une augmentation de la concentration diminue légèrement le rendement il semble par conséquent préférable de se placer à C = −1

En ce qui concerne T on ne peut pas tirer de conclusion simple de sa valeur positive sans considérer aussi le catalyseur en raison de la forte interaction TK. Les auteurs cités plus haut,

visualisent l'interaction TK en projetant le cube sur le plan TK

Les valeurs indiquées en chaque sommet du carré obtenu sont les moyennes des rendements observés avec les deux catalyseurs



On voit nettement que le catalyseur B est beaucoup plus sensible à une variation de température que le catalyseur A.

Dans ce cas particulier je préfère remarquer que le domaine expérimental est constitué par deux faces du cube $K = 1$ et $K = -1$ et que les 8 expériences realisées correspondent en fait à 2 plans factoriels 2^2 qu'il est possible de traiter séparement.

Premier plan : $K = -1$

	T	C	
exp 1	−	−	60
2	+	−	72
3	−	+	54
4	+	+	68

$\beta_{O1} = 63,5$
$\beta_{T1} = 6,5$
$\beta_{C1} = -2,5$
$\beta_{TC1} = 0,5$

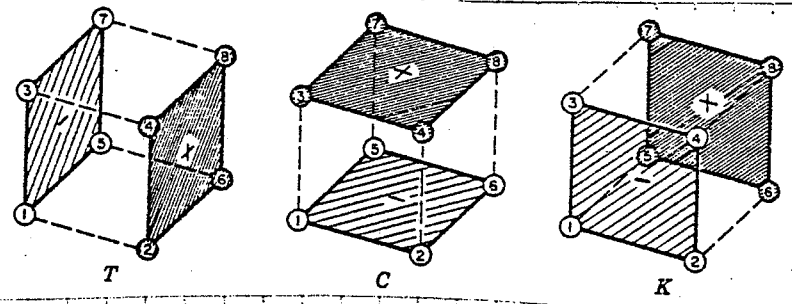
Deuxieme plan : $K = +1$

	T	C	
exp 5	−	−	52
6	+	−	83
7	−	+	45
8	+	+	81

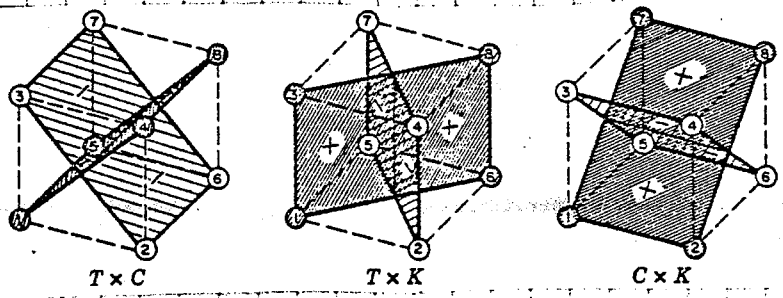
$\beta_{O2} = 65,0$
$\beta_{T2} = 16,5$
$\beta_{C2} = -2,5$
$\beta_{TC2} = 1,0$

Le résultat pratique le plus important est que les deux catalyseurs A et B etaient en principe identiques mais provenaient de deux fournisseurs differents. Avant de poursuivre les expériences, une étude soigneuse du catalyseur fut entreprise

e/ Représentation géométrique des effets moyens et des interactions

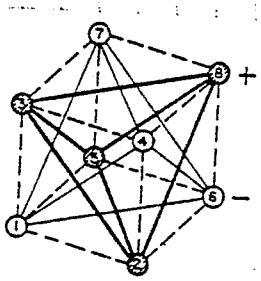


Effets moyens



Interactions du premier ordre

Interaction d'ordre 2



T×C×K

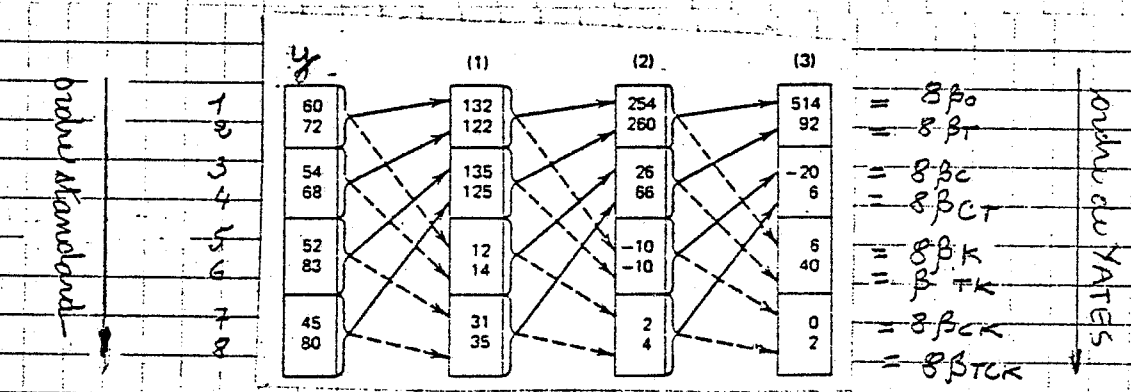
L'examen de cette dernière figure est important. Dans le calcul de l'effet, les rendements attachés aux sommets 2, 3, 5, 8 sont affectés du signe +, ceux qui sont affectés aux sommets 1, 4, 6, 7 du signe − Les deux tétraèdres correspondants sont parfaitement encastrés : un sommet de l'un a pour voisins 3 sommets de l'autre Ceci entraine qu'une interaction d'ordre 2 doit être faible (pratiquement nulle) Mathématiquement c'est faux et il est facile d'imaginer des fonctions $y = f(T,C,K)$ donnant une forte interaction TCK Mais dans la pratique les réponses observées sont des fonctions

"raisonnables" Dans le cas présent, la réponse sera probablement bien représentée par un polynome complet de degré 2

$$y = b_0 + b_T T + b_C C + b_K K + b_{T^2} T^2 + b_{C^2} C^2 + b_{K^2} K^2 + b_{TC} TC + b_{TK} TK + b_{CK} CK$$

La valeur de β_{TCK} calculée : $\beta_{TCK} = \frac{-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8}{8}$ est nulle. Ce résultat qui se généralise aisément aux interactions d'ordre > 2 est très important pour l'utilisation des plans à trois ou plus de 3 facteurs.

§1 Le schéma ci dessous indique le principe du calcul des effets par l'algorithme de YATES. Cet algorithme est facilement programmable sur une petite machine à calcul.



3 variables ⇒ 3 colonnes.

→ ajouter les 2 chiffres

→ retrancher (chiffre du bas − chiffre du haut)

4. Plan factoriel 2^4 cet exemple va mettre en évidence le défaut principal de la technique des plans factoriels à deux niveaux complets. Il s'agit de l'étude du rendement d'une réaction en fonction de 4 facteurs.

a/ Domaine expérimental et niveaux des facteurs

		−	+
1	poids du catalyseur	10 kg	15 kg
2	température	220 °C	240 °C
3	pression	35 bars	55 bars
4	concentration	10%	12%

5. Matrice d'expérience

ordre standard	1	2	3	4	conversion (%)	ordre d'exécution
1	−	−	−	−	71	(8)
2	+	−	−	−	61	(2)
3	−	+	−	−	90	(10)
4	+	+	−	−	82	(4)
5	−	−	+	−	68	(15)
6	+	−	+	−	61	(9)
7	−	+	+	−	87	(1)
8	+	+	+	−	80	(13)
9	−	−	−	+	61	(16)
10	+	−	−	+	50	(5)
11	−	+	−	+	89	(11)
12	+	+	−	+	83	(14)
13	−	−	+	+	59	(3)
14	+	−	+	+	51	(12)
15	−	+	+	+	85	(6)
16	+	+	+	+	78	(7)

Remarque : Les expériences ne sont pas faites dans l'ordre standard mais au hasard.

c. Matrice des effets

I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234	conversion (%)
+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	71
+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	61
+	−	+	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	−	+	−	90
+	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+	+	+	82
+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	68
+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+	61
+	−	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−	+	+	−	+	87
+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	−	−	80
+	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+	−	61
+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+	50
+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	89
+	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−	−	83
+	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	59
+	+	−	+	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	51
+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	−	85
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	78

Matrice d'expérience

ex de calcul : $\beta_{124} = \dfrac{-71 + 61 + 90 - 82 \ldots}{16}$

$= 0,25$

c/ Moyenne et calcul des effets

moyenne	$\beta_0 = 72,25$	$\leftarrow 72,25$	
poids de cat	$\beta_1 = -4,00$	$\leftarrow -4$	
temp.	$\beta_2 = 12,00$	$\leftarrow 12$	
pression	$\beta_3 = -1,1$	$0,5$	
concentration	$\beta_4 = -2,75$	$-1,125$	
	$\beta_{12} = 0,50$	$0,375$	
	$\beta_{13} = 0,38$	$-0,625$	
	$\beta_{14} = 0,00$	$-0,375$	
	$\beta_{23} = -0,63$	$-2,75$	
	$\beta_{24} = 2,25$	$\leftarrow 0$	
	$\beta_{34} = -0,13$	$2,25$	

$\beta_{123} = -0,38$ $\quad 0,25$

$\beta_{124} = 0,25$ $\quad -0,125$

$\beta_{134} = -0,13$ $\quad -0,125$

$\beta_{234} = -0,38 - 0,375$

$\beta_{1234} = -0,13 - 0,125$

Seules les flèches correspondent à des effets importants.

effet négatif pour β_1 et β_3 → On s'intéressera au niveau bas pour 1 et 3.

d/ Commentaires Le poids de catalyseur et la pression ne donnent pas d'interactions du 1er ordre notables ni entre eux ni avec les autres facteurs. Leur effet moyen est négatif : on peut les laisser au niveau bas ou envisager de les diminuer ultérieurement (économie ?)

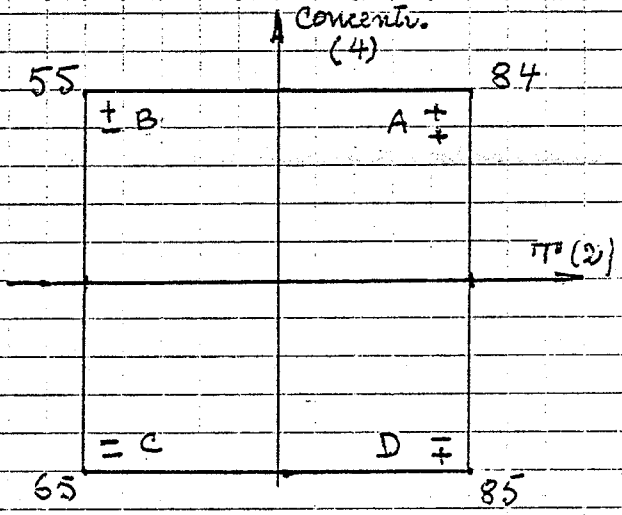
Il y a par contre une interaction nette entre concentration et température. L'influence de ces deux facteurs doit être examinée en bloc. Il est commode d'utiliser une projection des 16 résultats expérimentaux aux sommets d'un carré tracé dans le plan T_conc. Pour obtenir cette projection on détermine à l'aide de la matrice d'expérience les quatre essais qui se projettent en chacun des sommets A, B, C, D qui est affecté de la moyenne correspondante.

Remarques 1) un plan à k facteurs donne lieu à $\frac{k(k-1)}{2}$ projections de ce type

2) On peut utiliser ce procédé pour interpréter une interaction d'ordre 2. Un plan à k facteurs donne lieu à $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$ projections aux sommets d'un cube (espace à 3 dimensions)

observation number	T° 1	2	3	Conc 4	conversion (%)	
1	−	−	−	−	71	C
2	+	−	−	−	61	C
3	−	+	−	−	90	D
4	+	+	−	−	82	D
5	−	−	+	−	68	C
6	+	−	+	−	61	C
7	−	+	+	−	87	D
8	+	+	+	−	80	D
9	−	−	−	+	61	B
10	+	−	−	+	50	B
11	−	+	−	+	89	A
12	+	+	−	+	83	A
13	−	−	+	+	59	B
14	+	−	+	+	51	B
15	−	+	+	+	85	A
16	+	+	+	+	78	A

T°	Conc			
+	+	A	$\frac{89+83+85+78}{4}$	$= 83{,}75 \sim 84$
−	+	B	$\frac{61+50+59+51}{4}$	$= 55{,}25 \sim 55$
−	−	C	$\frac{71+61+68+61}{4}$	$= 65{,}25 \sim 65$
+	−	D	$\frac{90+82+87+80}{4}$	$= 84{,}75 \sim 84$



La température a dans tout les cas un effet positif ; à basse température, la concentration a un effet négatif, à forte température un effet très faible. On peut penser qu'il y a intérêt à opérer à T élevée, la concentration n'ayant alors aucune importance.

Ce plan comporte 16 expériences. On en attend 11 informations (1 valeur moyenne, 4 effets moyens, 6 interactions d'ordre 1). On peut estimer que 5 des 16 expériences sont inutiles. Le tableau suivant montre que cette cette situation s'aggrave lorsque le nombre des facteurs contrôlés augmente

Nbre de facteurs R	Nbre d'expériences d'un plan 2^R	Nbre d'informations importantes	Expériences "inutiles"
2	4	4	0
3	8	7	1
4	16	11	5
5	32	16	16
6	64	22	42
7	128	29	99
8	256	37	219
9	512	46	466
10	1024	56	968

Dans la pratique on dépassera rarement 10 facteurs contrôlés.

L'utilisation de plans factoriels fractionnaires permet de diminuer considérablement le nombre d'expériences nécessaires pour évaluer les effets importants

---

=> 5 exp pratiquement pour rien pour 16 exp réalisées.