Concentration des porteurs dans l'Arséniure de Gallium

L'Arséniure de Gallium GaAs est un semi-conducteur dont le gap vaut $E_c - E_v = 1,43$ eV où E_c est l'énergie du bas de la bande de conduction et E_v celle du haut de la bande de valence. En première approximation, le gap est indépendant de la température.

1°) L'énergie d'un état de vecteur d'onde $\vec{k}$ dans la bande de conduction est $E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_n^*}$ où m_n^* est la masse effective dans la bande de conduction. Montrer que la densité d'états par unité de volume de GaAs $f(E)$ est donnée par $f(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} (m_n^*)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}$

2°) Exprimer sous la forme d'une intégrale la concentration n d'électrons libres (dans la bande de conduction) en fonction de $\hbar$, m_n^*, kT, E_c et E_F le niveau de Fermi.
En admettant que $E_c - E_F \gg kT$, montrer que n est donnée par $n = N_c \exp\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right)$ où N_c, appelée densité équivalente d'états, vaut $N_c = 2 \left(\frac{m_n^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

On peut montrer d'une façon semblable que la concentration p des trous dans la bande de valence est donnée par $p = N_v \exp\left(\frac{E_v - E_F}{kT}\right)$ où $N_v = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$, m_p^* étant la masse effective des trous
On donne à $T_a = 300$ K, $N_{Ca} = 4,7\ 10^{23}$ m^{-3} et $N_{Va} = 7\ 10^{24}$ m^{-3}

3°) Calculer la position du niveau de Fermi E_F dans GaAs intrinsèque. Calculer la concentration intrinsèque n_i à 300K.

4°) Le GaAs est maintenant dopé, de type N, et contient une concentration N_D d'impuretés donneuses ; il comporte alors par unité de volume N_D niveaux donneurs d'énergie E_D ($E_c - E_D = 0,01$ eV). a) Ecrire l'équation de neutralité du cristal puis montrer que si on néglige la concentration p, E_F peut être donné par l'expression

$$E_F = E_D + kT \ln\left[\frac{\sqrt{1 + 4\frac{N_D}{N_c}\exp\left(\frac{E_c - E_D}{kT}\right)} - 1}{2}\right]$$

On donne $N_D = 10^{21}$ m^{-3}

b) Calculer la température T_0 pour laquelle $4\frac{N_D}{N_c}\exp\left(\frac{E_c - E_D}{kT}\right)$ vaut 1

c) Donner une expression simple de E_F puis de n pour $T \ll T_0$ quelle est la limite de E_F pour $T \to 0$K ?

d) Donner une expression simple de E_F puis de n pour $T \gg T_0$.

e) Si la température est suffisamment élevée, on ne peut plus négliger p. Calculer la température pour laquelle $p = N_D/10$ puis la température T_1 pour laquelle $p = N_D$. Calculer n et p pour $T \gg T_1$ où se situe alors le niveau de Fermi ?

f) Récapituler les résultats obtenus en traçant la courbe représentant la variation de $\ln(n)$ en fonction de $1/T$. En déduire une méthode de mesure de N_D et E_D

REMARQUE : on justifiera l'hypothèse $E_c - E_F \gg kT$ tout au long du problème

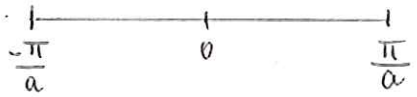
---

On donne $k = 1,38\ 10^{-23}$ J/K et la charge élémentaire $q = 1,6\ 10^{-19}$ C.

Concentration des porteurs dans AsGa

1°) Densité d'états par unité de volume $g(E)$

Soit la 1ère zone de brillouin en 1D :



longueur entre 2 états : $\frac{2\pi}{a}$

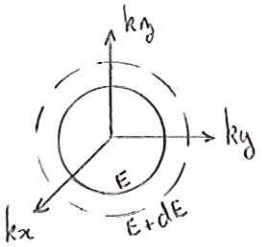
S'il y a N atomes dans le cristal : ——— : $\frac{2\pi}{aN}$

ceci pour 2 e^- puisque 2 états.

→ pour 1 e^- : $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{aN}$

et en 3D : volume du cube : $\left(\frac{2\pi}{aN}\right)^3$ pour 2 électrons → $V/\text{état} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aN}\right)^3$

La densité d'états est le nb d'états compris entre E et E + dE :



N° d'états de l'île la sphère : $Vk = \frac{4}{3}\pi k^3$

soit entre E et E + dE : $4\pi k^2 dk = dVk$ états

$$g(E) = \frac{dVk}{V/\text{état}\ dE} \rightarrow g(E)\,dE = \frac{2V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi k^2\,dk \quad \text{si } \underline{V = (aN)^3}$$

or $E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_n^*} \rightarrow dE = \frac{\hbar^2 k}{m_n^*} dk \rightarrow k.dk = \frac{m_n^*}{\hbar^2} dE$

et $k = \left[\frac{2 m_n^*}{\hbar^2}(E - E_c)\right]^{1/2}$

$$\rightarrow g(E)\,dE = \frac{2V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \sqrt{\frac{2 m_n^*}{\hbar^2}(E-E_c)} \cdot \frac{m_n^*}{\hbar^2} dE$$

soit par unité de volume :
(pour 1 vol élémentaire + exactement)

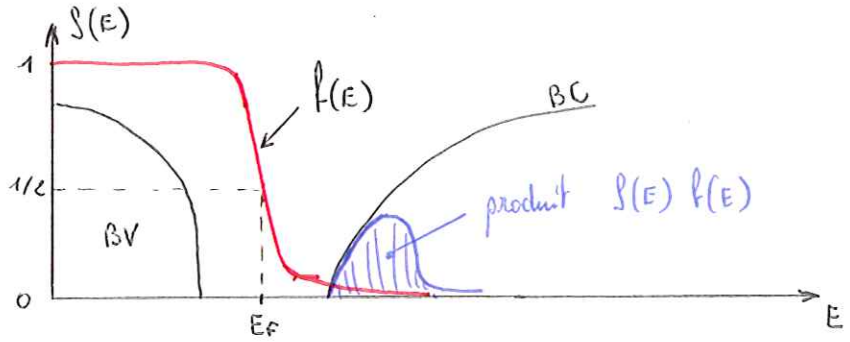
$$\boxed{g(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} (m_n^*)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}}$$

2°) Concentration n d'électrons libres de BC et de trous p de BV

Nombre d'e^- libres de BC : $n(E) = \int_0^\infty g(E)\, f(E)\, dE$

→ $$n(E) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} (m_n^*)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} \cdot \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}} \, dE$$

Graphiquement :



$E_c - E_F \gg kT$ → $E - E_F \gg kT$ → $f(E) = e^{\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right)}$

→ $$n(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} (m_n^*)^{3/2} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right)} dE$$

puisqu'aucun état entre 0 et E_c. D'autre part : $E - E_F = E - E_c + E_c - E_F$

avec $x = \frac{E - E_c}{kT}$ → $dE = dx$

→ $$n(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} (m_n^*)^{3/2} e^{-\left(\frac{E_c - E_F}{kT}\right)} (kT)^{3/2} \underbrace{\int_{E_c}^{\infty} \sqrt{x} \, e^{-x} dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

→ $$n(E) = 2 \left(\frac{m_n^* kT}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(- \frac{E_c - E_F}{kT} \right)$$

avec $$N_c = 2 \left(\frac{m_n^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$ = densité équivalente d'états

Pour les trous :

$$p(E) = \int_{-\infty}^{E_v} g(E) \, (1 - f(E)) \, dE$$

$$1 - f(E) = \frac{e^{\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}}{1 + e^{\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}}$$ puisque $|E - E_F| \gg kT$

→ $$1 - f(E) = e^{\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{p(E) = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_V - E_F}{kT}\right)}$$

avec $$\boxed{N_V = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}.$$

3°) Position de E_F du AsGa intrinsèque

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right)$$

$$p = N_V \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{kT}\right)$$

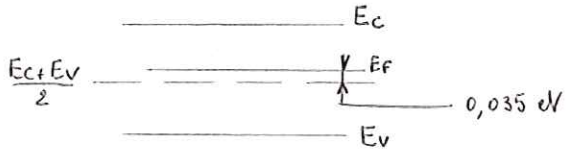
$$1 = \frac{N_C}{N_V} \exp\left(\frac{+E_F - E_V - E_C + E_F}{kT}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{-2E_F + E_V + E_C}{kT} = \ln\frac{N_V}{N_C}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{E_F = \frac{E_V + E_C}{2} + \frac{kT}{2}\ln\left(\frac{N_V(T)}{N_C(T)}\right)}$$

à 300K : $N_V = 7.10^{24}\ m^{-3}$ $\quad N_C = 4,7.10^{23}$ $\rightarrow$ $\frac{kT}{2}\ln\frac{N_V}{N_C} = 0,035$ eV

$\rightarrow$



Concentration intrinsèque :

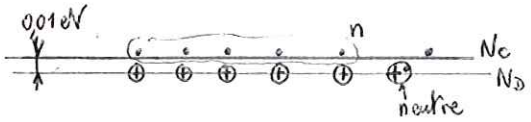
$$n_i^2 = n\,p = N_C N_V\, e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}\, e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

$$= N_C N_V\, e^{\frac{-E_C + E_F - E_F + E_V}{kT}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{n_i = \sqrt{N_C N_V}\, e^{\left(\frac{E_V - E_C}{2kT}\right)}}$$

4°) Dopage n

a)



neutralité électrique

probabilité d'occupat° d'1 niveau E_D : $f(E_D) = \dfrac{1}{1 + e^{\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)}}$

On a alors $N_D(1-f)$ donneurs ionisés

→ équat° de neutralité : $\boxed{\rho + N_D(1-f) = n}$

On néglige ρ à T assez basse :

$$n = N_D(1-f)$$

$$N_c\, e^{\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right)} = N_D\left(1 - \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)}}\right)$$

$$N_c\, e^{\left(\frac{E_F - E_D + E_D - E_c}{kT}\right)} = N_D\left(\frac{1 + e^{\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)} - 1}{1 + e^{\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)}}\right)$$

$$N_c\, e^{\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right)} + N_c\, e^{\left(\frac{E_D - E_c}{kT}\right)} = N_D\, e^{\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)}$$

$$N_c\, e^{\left(\frac{E_F - E_D + E_D - E_c}{kT}\right)} + N_c\, e^{\left(\frac{E_D - E_c}{kT}\right)} = N_D\, e^{\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)}$$

$$\frac{N_c}{N_D}\left[e^{\frac{E_F - E_D}{kT}}\right]^2 e^{\left(\frac{E_D - E_c}{kT}\right)} + \frac{N_c}{N_D}\, e^{\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)} e^{\left(\frac{E_D - E_c}{kT}\right)} - 1 = 0$$

avec $x = e^{\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)}$ et $\alpha = \frac{N_c}{N_D} e^{\left(\frac{E_D - E_c}{kT}\right)}$

→ $\alpha x^2 + \alpha x - 1 = 0$

→ $x = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2\alpha} > 0$ pour raison Physique

→ $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha}} = e^{\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)}$

→ $\dfrac{E_F - E_D}{kT} = \ln\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{N_D}{N_c}\, e^{-\left(\frac{E_D - E_c}{kT}\right)}}\right]$

→ $$E_F = E_D + kT \ln\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{N_D}{N_C} e^{-\left(\frac{E_D - E_C}{kT}\right)}}\right]$$

b)

$$4\frac{N_D}{N_C} \exp\left(\frac{E_C - E_D}{kT}\right) = 1$$

$$\exp\left(\frac{E_C - E_D}{kT}\right) = \frac{N_C}{4N_D}$$

$$\frac{E_C - E_D}{kT} = \ln\left(\frac{N_C}{4N_D}\right) \quad \rightarrow \quad T_0 = \frac{E_C - E_D}{k \ln\left(\frac{N_C}{4N_D}\right)}$$

à 300 K → $T_0 = 24,35$ K ↝ He(ℓ)

c) $T \ll T_0$ → 1 négligeable ds la racine

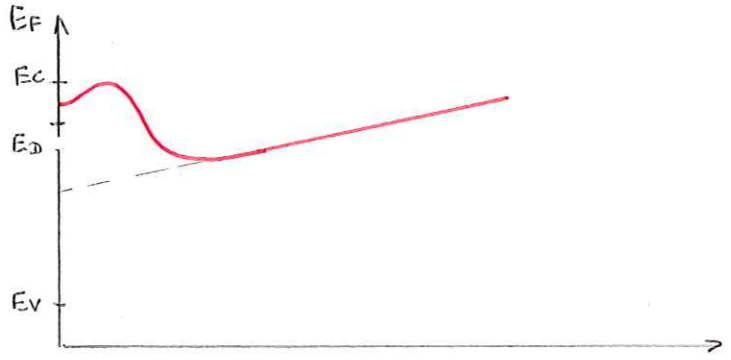
→ $$E_F = E_D + kT \ln\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{N_D}{N_C} e^{\left(\frac{E_C - E_D}{kT}\right)}}\right]$$

$$= E_D + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_D}{N_C} e^{\left(\frac{E_C - E_D}{kT}\right)}\right)$$

→ $$E_F = E_D + \frac{kT}{2} \ln\frac{N_D}{N_C} + \frac{E_C - E_D}{2}$$

→ $$E_F = \frac{E_D + E_C}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_D}{N_C}\right)$$

Qd $T \rightarrow 0$K : $E_F \rightarrow \frac{E_D + E_C}{2}$



en reprenant la formule de n :

→ $$n = \sqrt{N_D N_C} \exp\left(\frac{E_D - E_C}{2kT}\right)$$ pour $T \ll T_0$ 1er régime

d) $T \gg T_0$:

$$\rightarrow \quad E_F \simeq E_D + kT \ln\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4N_D}{N_C}\left(1 + \frac{E_C - E_D}{kT}\right)}\right]$$

puisqu'alors l'exp $\rightarrow 1$ $\quad (\exp(\varepsilon) \simeq 1 + \varepsilon)$

$$\simeq E_D + kT \ln\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4N_D}{N_C} + \frac{4N_D}{N_C}\left(\frac{E_C - E_D}{kT}\right)}\right]$$

$\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\simeq E_D + kT \ln\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{N_D}{N_C}\left(1 + \frac{E_C - E_D}{kT}\right)\right)\right]$$

$$\simeq E_D + kT \ln\left[-\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{N_D}{N_C}\left(1 + \frac{E_C - E_D}{kT}\right)\right]$$

$\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$

$$\simeq E_D + kT \ln\frac{N_D}{N_C} + E_C - E_D$$

$$\rightarrow \boxed{E_F \simeq E_C + kT \ln\frac{N_D}{N_C}}$$

ionisation totale : ⊕⊕⊕⊕⊕⊕

alors $\boxed{n = N_D}$ pour $T \gg T_0$ 2e régime

e) On ne peut plus négliger ρ :

$$n = \rho + N_D$$

On veut $\rho = \alpha N_D$

$$\rightarrow \quad n = \alpha N_D + N_D$$

$$\rightarrow \quad \frac{n_i^2}{\rho} = \alpha N_D + N_D = \frac{n_i^2}{\alpha N_D}$$

$$\rightarrow \quad n_i = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha) N_D^2} = \sqrt{N_C N_V}\, e^{-\frac{E_C - E_V}{2kT_i}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{T_i = -\frac{E_g}{2k}\left(-\ln\frac{\sqrt{N_C N_V}}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha}\, N_D}\right)^{-1}}$$

Soit : $\alpha = \frac{1}{10}$: $\longrightarrow$ $T = 964\ K$

$\alpha = 1$: $\longrightarrow$ $T_1 = 1160\ K$

} en négligeant N_V et $N_C = f(T)$

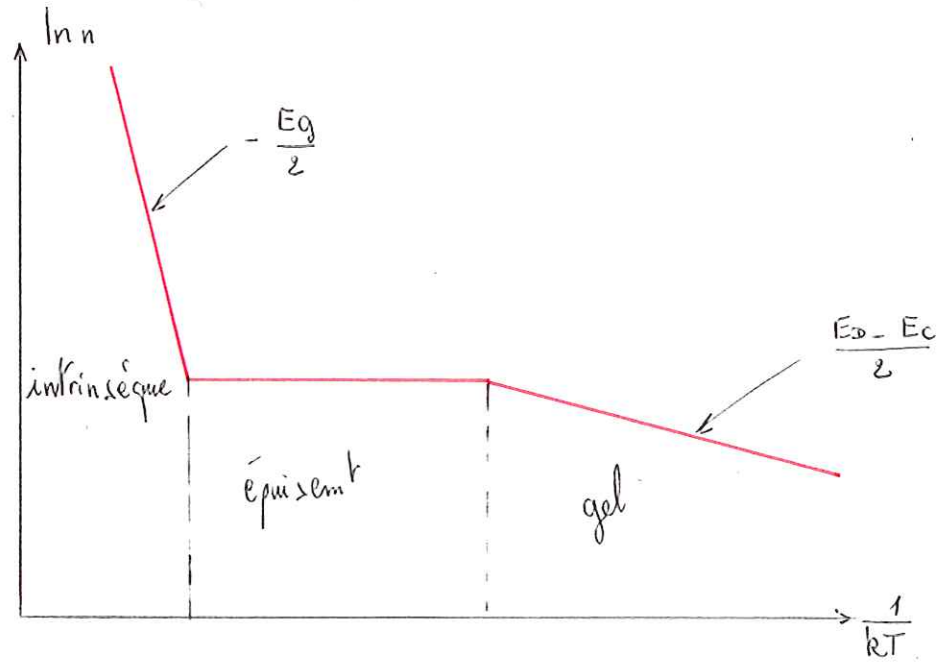
pour T_1 : $p = N_D$

$T \gg T_1 \longrightarrow p \gg N_D \longrightarrow n = p + \cancel{N_D}$

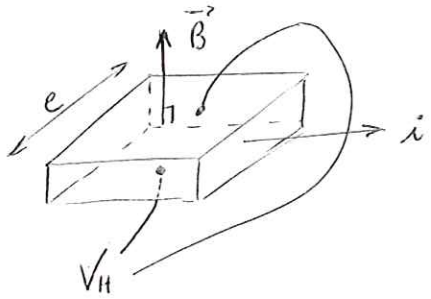
$\longrightarrow$ $\boxed{n \simeq p = n_i}$ 3ème régime

puisque $n = p$: $E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_V}{N_C}$ avec $\frac{N_V}{N_C} > 0$

f)



accessible par effet Hall :



$V_H = \frac{i B}{e q n}$ $\longrightarrow$ n

intérêt d'1 telle courbe : dosage des impuretés.